Colles semaine 11

En bref

- Dérivation des bijections réciproques réelles.
- Étude des fonctions trigonométriques réciproques.
- Application à la primitive de fractions rationnelles.
- Micro-introduction à la notion de polynôme : notation $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$, définition du degré et principe d'identification des coefficients d'un polynôme.
- Résolution de l'équation $z^2 = w$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Recherche des solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
- Application à la résolution d'équation complexes de degré 2.
- Relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 2.
- Racine n-ème de l'unité. Application à la résolution de l'équation $z^n = w$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Exemples de résolution d'équations polynomiale de degré au moins 3 en trouvant une racine « évidente » puis en factorisant.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Définir proprement la fonction arcsinus (ou arcosinus ou arctangente). Étudier sa dérivabilité et sa dérivée.
- Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$ ou un exemple du même acabit (avec dénominateur sans racines réelles).
- Démontrer la formule de résolution par radicaux des équations de degré 2 (complexes).
- Résoudre une équation de degré 2 au choix du colleur (avec discriminant non réel).
- Montrer que $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\right\}$.
- Résoudre avec preuve l'équation $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Note aux colleurs

- Concernant l'étude des polynômes, nous avons introduit la notation avec indéterminée X. Les étudiants sont pour l'instant libres de l'utiliser ou non.
- Pour les polynômes, les seuls résultats théoriques exigibles sont le principe d'identification des coefficient et la possibilité de factoriser par $X - \alpha$ pour un polynôme admettant une racine en α. Cela est pour l'instant admis.
- La notation $\sqrt{z}$ est absolument PROSCRITE si z n'est pas un réel positif.

En détail

Bijection réelles et trigonométrie réciproque

Reprise du programme précédent

Équations polynomiales complexes

1 Prologue, rappels sur les polynômes

Nous commençons par rappeler ce qu'est un polynôme.

Définition 1. Soit P une application définie sur $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$. On dit que P est *une application polynomiale* ou un *polynôme* s'il existe un entier naturel n et un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k. \tag{1}$$

Lemme 2 (degré). *Soit P une application polynomiale, non constante nulle, alors il existe un et un unique entier naturel n et unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant*

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \\ \text{et } a_n \neq 0. \end{cases} . \tag{2}$$

Cet entier n s'appelle le degré *de P et le complexe a_n s'appelle le* coefficient dominant *de P.*

Par convention, le degré du polynôme constant nul vaut $-\infty$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n (incluant le polynôme nul).

Proposition 3 (dérivation itérées des monômes). *Pour tout entiers $(k,p) \in \mathbb{N}^2$, on a :*

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} X^k = \begin{cases} 0 & \text{si } p > k \\ \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p} & \text{si } p \leqslant k \end{cases} \tag{3}$$

Corollaire 4 (Formule de Taylor pour les polynômes). *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Corollaire 5 (principe d'identification des coefficients d'un polynôme). *La suite des coefficients d'un polynôme est unique. Notamment, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1},$$
$$\left(\forall z \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k \right) \implies \left(\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], a_k = b_k \right).$$

2 Le second degré

2.1 Calcul de racines carrées

Définition 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **racine carrée** de z tout nombre complexe Z tel que $Z^2 = z$.

Proposition 7. *Le complexe* 0 *admet une unique racine carrée qui est* 0*. Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées qui sont opposées l'une de l'autre.*

Proposition 8. *Soit $w \in \mathbb{C}$, on cherche à résoudre l'équation $z^2 = w$ par forme trigonométrique.*

- *Si $w = 0$, alors $z = 0$ est l'unique solution.*
- *Sinon, en notant $r = |w|$ et $\theta = \arg(w)$, l'équation admet exactement deux solutions qui sont :*

$$\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\pi} = -\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$$

Méthode 9 (Résolution sous forme algébrique)**.** Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et cherchons les solutions de $z^2 = w$. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$ de sorte que l'équation revient à $(a + \mathrm{i}b)^2 = w$. On cherche a et b en :

1. identifiant les parties réelles,
2. puis en identifiant les modules.
3. On obtient un système de deux équations pour les deux inconnues a^2 et b^2. Ceci donne deux valeurs possibles pour a et deux valeurs possibles pour b, soit quatre candidat-solutions pour z.
4. On écarte les deux mauvaises solutions en identifiant les signes des parties imaginaire.

2.2 Second degré général

De manière tout à fait analogue à ce qu'il se passe dans le cas réel, l'extraction de racine carrée permet de résoudre toutes les équations du second degré via la misse sous forme canonique du trinôme. Le théorème est même plus simple puisque tous les complexes admettent (au moins) une racine carré. Il n'y a donc pas de trinôme du second degré sans racine complexe.

Proposition 10 (Equation du second degré à coefficients complexes)**.** *Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On considère l'équation :*

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors,

- *Si $\Delta \neq 0$, en notant δ une solution de $\delta^2 = \Delta$, l'équation (E) admet les deux racines distinctes suivantes :*
$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$
- *Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet pour racine double*

$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Proposition 11. *Si a, b et c sont réels et si z_1 est une racine de $az^2+bz+c = 0$; alors $z_2 = \bar{z}_1$ est aussi une racine (pas nécessairement distincte) de l'équation.*

2.3 Relation coefficients-racines

Proposition 12. *Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors,*

z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Application 13.
- Soient deux nombres complexes s et p fixés. Si l'on cherche deux complexes z_1 et z_2 tels que :

$$z_1 + z_2 = s \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = p$$

alors on peut dire que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation : $z^2 - sz + p = 0$.
En particulier, il existe toujours un couple de tel complexes et ce couple est unique à l'ordre des éléments près.

- Si on connaît une des solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (où a, b et c sont trois nombres complexes avec $a \neq 0$) , alors on peut facilement trouver l'autre.

Exemple 14.
i) *Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que : $z_1 + z_2 = 1 + 4i$ et $z_1 z_2 = -5 + 5i$.*
ii) *Résoudre l'équation $z^2 - (1 + a + a^2)z + a(1 + a^2) = 0$ où $a \in \mathbb{C}$.*
iii) *En quoi les solutions de l'équation $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$ (où θ est un réel donné) sont-elles "évidentes" ?*

Terminons par une autre considération utile.

Lemme 15. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $a \neq 0$, on pose alors $P : z \mapsto az^2 + bz + c$. Soit également z_0 un autre complexe. Si z_0 est une racine du polynôme* ***à coefficient réel*** *P, alors $\bar{z}_0$ est également une racine de P. C'est-à-dire que $P(z_0) = 0 \implies P(\bar{z}_0) = 0$.*

3 Degré quelconque et racines n-ièmes

Définition 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un complexe fixé. On appelle *racine n-ème de l'unité* tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.

3.1 Racines de l'unité

Notation 17. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Proposition 18. *Il existe exactement n racines de l'unité et*
Ainsi,

$$\mathbb{U}_n == \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid k \in [\![0\,;\,n-1]\!] \right\}.$$

L'ensemble des racines de l'unité représente géométriquement les affixes d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique. En particulier, l'isobarycentre de ce polygone est l'origine du repère ; ce qui se traduit par la proposition suivante.

Proposition 19. *Soit n un entier au moins égal à 2. On a $\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = 0$. Plus explicitement, cela signifie que si l'on pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, alors on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

Thèmes de réflexions 20. Comment résoudre l'équation $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ pour un entier naturel n fixé ?

3.2 Racine n-ème d'un complexe quelconque

Proposition 21. *Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Posons $a = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*

i) Le nombre complexe a admet exactement n racines n-ièmes, ce sont les

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad , \quad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

ii) Si z_0 est une racine n-ième particulière de a alors les racines n-ièmes de a sont les $z_0 w_k$ avec $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ et où les w_k sont les racines n-ièmes de l'unité. L'ensemble des racines n-ièmes de a est donc $z_0\mathbb{U}_n = \{z_0 w \ ; \ w \in \mathbb{U}_n\}$.

iii) Les images dans le plan des racines n-ièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés d'isobarycentre O.

3.3 Cas général du degré n

Nos démontrerons bientôt qu'un polynôme complexe de degré n admet au plus n racines. Trouver explicitement ces racines est long et technique dans le cas du degré 3 ou 4. Il n'existe aucune formule à radicaux permettant de résoudre tous les polynôme de degré 5 ou supérieur.