Colles semaine 12

En bref

- Micro-introduction à la notion de polynôme : notation $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$, définition du degré et principe d'identification des coefficients d'un polynôme.
- Résolution de l'équation $z^2 = w$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Recherche des solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
- Application à la résolution d'équation complexes de degré 2.
- Relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 2.
- Racine n-ème de l'unité. Application à la résolution de l'équation $z^n = w$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Exemples de résolution d'équations polynomiale de degré au moins 3 en trouvant une racine « évidente » puis en factorisant.
- Équations différentielles linéaire d'ordre 1 :
  - Cas homogène.
  - Recherche de solution par variation de la constante. Structure de l'ensemble des solutions connaissant celles de l'équation homogène associé.
  - Problème de Cauchy du premier ordre.
- Équations différentielles linéaire d'ordre 1 :
  - Cas homogène à coefficients constant
  - Structure de l'ensemble des solutions connaissant celles de l'équation homogène associé. Principe de superposition.
  - Problème de Cauchy du deuxième ordre dans le cas des coefficients constants.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer que $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\right\}$.
- Résoudre avec preuve l'équation $z^n = -2\mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. *La preuve exploitera le résultat connu des racines de l'unité.*
- Résoudre avec preuve l'équation $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou un exemple approchant.
- Montrer le théorème de structure de l'ensemble des solutions pour les équations différentielles linéaires (ordre 1 ou 2 au choix du colleur).
- Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$ ou un exemple approchant.

Note aux colleurs

- Pour les polynômes, les seuls résultats théoriques exigibles sont le principe d'identification des coefficient et la possibilité de factoriser par $X - \alpha$ pour un polynôme admettant une racine en α. Cela est pour l'instant admis.
- Pour cette semaine, en cas d'équation différentielle de degré 2 avec second membre, le colleur indiquera aux étudiants sous quelle forme, il convient de chercher une solution particulière.
- Nous avons introduit la notation Vect(...) pour décrire l'ensemble des solutions d'une équation différentielles linéaire homogène. Les étudiants sont libres de l'utiliser ou non.

En détail

Équations polynomiales complexes

Reprise du programme précédent

1 Équations différentielles linéaire d'ordre 1

Notations valables pour toute la section :

Notation 1. On considère un intervalle J de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un singleton) ainsi que α, β, γ trois fonctions continues sur J à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que qu'une fonction y définie sur J et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle

$$\alpha y' + \beta y = \gamma. \tag{E_1}$$

si la fonction y vérifie :

$$\begin{cases} y \text{ est dérivable sur } J \\ \text{et } \forall x \in J,\ \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x) \end{cases}$$

Définition 2. En reprenant les notations précédentes : si $\forall x \in J, \gamma(x) = 0$, alors l'équation (E_1) est dite *homogène.* On notera alors $E_{h,1}$ l'équation homogène associée à (E_1) obtenu en remplaçant la fonction γ par la fonction nulle.

Si $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(x) = 1$, alors l'équation (E_1) est dite *normalisée* ou *réduite.*

1.1 Cas des équations homogènes

1.1.1 Cas homogène à coefficients constant

Théorème 3. *Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ un couple de* ***scalaires*** *avec $a \neq 0$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $ay' + by = 0$ d'inconnue une fonction y dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

On introduit l'équation caractéristique $az + b$ d'inconnue $z \in \mathbb{K}$. Cette équation admet une unique solution (car $a \neq 0$) que l'on note r.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est alors $\left\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{rt} \mid \lambda \in \mathbb{K}\right\}$.

1.1.2 Cas homogène normalisé

On s'intéresse donc aux solutions de l'équation

$$y' + \beta y = 0. \tag{$E_{n,h,1}$}$$

Dans ce cas les solutions sont stables par combinaisons linéaires.

Lemme 4. *Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène $(E_{n,h,1})$. Alors, pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation homogène $(E_{n,h,1})$.*

Théorème 5. *On note B une primitive de la fonction β sur J. Alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(-B(x)) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Autrement dit, toutes les solutions sont colinéaires à la fonction $x \mapsto \exp(-A(x))$. Si l'on note $y_0 : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(-B(x)) \end{array}$, alors l'ensemble des solutions se note $\mathrm{Vect}(y_0)$

1.2 Cas avec second membre

On s'intéresse donc aux solutions de l'équation

$$y' + \beta y = \gamma. \tag{$E_{n,1}$}$$

On notera encore $(E_{n,h,1})$ l'équation homogène associée.

Dans ce cas l'ensemble des solutions s'exprime à l'aide de l'ensemble des solutions homogène ainsi que d'une solution particulière.

Théorème 6. *Soit y_p une solution particulière de l'équation $(E_{n,1})$. On note encore B une primitive de la fonction β sur J. On note également $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $E_{n,h,1}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solution de l'équation avec second membre $(E_{n,1})$. Alors l'ensemble des solutions de l'équation est :*

$$\mathcal{S} = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\} = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y_1(x) + \lambda \exp(-B(x)) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Autrement dit, il suffit de résoudre l'équation homogène et de trouver une *solution de $(E_{n,1})$ pour trouver* toutes *les solutions de $(E_{n,1})$*

Méthode 7 (Variation de la constante)**.** On note encore B une primitive de β sur J. Pour trouver une solution particulière de l'équation $E_{n,1}$, on la cherche sous la forme $x \mapsto \lambda(x)\exp(-B(x))$. C'est-à-dire que on considère une fonction quelconque λ dérivable et que l'on pose ensuite $y : x \mapsto \lambda(x)\exp(-B(x))$.

On trouve alors une condition nécessaire et suffisante sur la fonction λ pour que y soit solution de $(E_{n,1})$. Une telle condition revient à spécifier la dérivée λ' et on n'a plus ensuite qu'à primitiver.

Théorème 8 (Problème de Cauchy pour le premier ordre normalisé)**.** *Soit $x_0 \in J$ et y_0 un réel quelconque. Alors il existe un et une unique fonction y qui soit solution de $(E_{n,1})$ et qui vérifie en plus la condition $y(x_0) = y_0$. Cette fonction est dite* solution du problème de Cauchy *associé à l'équation $(E_{n,1})$ et à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.*

1.3 Et les cas non normalisés ?

On revient à l'équation générale (E_1)

$$\alpha y' + \beta y = \gamma. \tag{E_1}$$

Méthode 9. On résout alors en fonction des points d'annulation de α.

- Si la fonction α ne s'annule pas sur J ; alors, on écrite l'équation équivalente $y' + \frac{\beta}{\alpha}y = \frac{\gamma}{\alpha}$ et on se ramène au cas normalisé.
- Si la fonction α s'annule un nombre fini de fois, on note alors $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les points d'annulation dans l'ordre croissant. On résout alors l'équation sur chacun des sous-intervalles $]a_i ; a_{i+1}[$ en normalisant. Il faut cependant faire attention au raccordement. La solution globale doit être dérivable sur l'intervalle J, en particulier en chacun des points a_i ; ce qui peut engendrer des contraintes fortes. Il peut arriver dans ce cas qu'aucune solution n'existe.
- Si la fonction α s'annule en un nombre infini de points .... bon courage !

2 Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

2.1 Cas homogène à coefficients constant

Pour les équations du second ordre, nous nous contenterons d'étudier le cas des équations dites à coefficients constants. Ceci est résumé dans les notations suivantes.

Notation 10. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ trois scalaires avec $a \neq 0$ ainsi que J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère également δ une fonction continue sur J et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse alors à l'équation différentielle suivante :

$$ay'' + by' + cy = \delta. \tag{E_2}$$

C'est-à-dire qu'une fonction y sera dite solution de (E_2) si elle est deux fois dérivable et vérifie $\forall x \in J,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \delta(x)$.

On notera également l'équation homogène associée :

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{$E_{h,2}$}$$

Lemme 11. *Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène $(E_{h,2})$. Alors, pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation homogène $(E_{h,2})$.*

2.1.1 Résolution complexe

On suppose pour le moment que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et donc que l'on cherche des solutions qui sont des fonctions définies sur J à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 12 (Résolution de l'équation homogène de second ordre, version complexe)**.** *On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_{h,2})$.*

On note également $\Delta = b^2 - 4ac$ et on s'intéresse à l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. La résolution de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ dépend du nombre de solutions de l'équation caractéristique. Précisément :

— *Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes que l'on note r_1 et r_2. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

— *Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une unique solution que l'on note r_0. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(r_0 x) + \mu x \exp(r_0 x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

2.1.2 Résolution réelle

Dans ce cas, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on cherche des solutions réelles. Évidemment, il faut adapter légèrement ce qui précède pour tenir compte du cas où l'équation caractéristique n'admet aucune solution.

Théorème 13 (Résolution de l'équation homogène de second ordre, version réelle)**.** *On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_{h,2})$.*

On note également $\Delta = b^2 - 4ac$ et on s'intéresse à l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}$. La résolution de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ dépend du nombre de solutions de l'équation caractéristique. Précisément :

— *Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes que l'on note r_1 et r_2. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

— *Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une unique solution que l'on note r_0. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(r_0 x) + \mu x \exp(r_0 x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

— *Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique n'admet aucune solution réelle. Elle admet en revanche deux solutions complexes conjuguées. On note alors r_+ la solution de partie imaginaire positive ainsi que $s = \mathrm{Re}(r_+)$ et $\omega = \mathrm{Im}(r_+)$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_{h,2})$ est donné par :*

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(sx)\cos(\omega x) + \mu \exp(sx)\sin(\omega x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2.2 Cas non homogène à coefficients constant

2.2.1 Principe général et problème de Cauchy à l'ordre 2

Théorème 14. *Soit y_1 une solution particulière de l'équation (E_2). On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $E_{h,2}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solution de l'équation avec second membre (E_2). Alors l'ensemble des solutions de l'équation est :*

$$\mathcal{S} = \{y_1 + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\}$$

Lemme 15 (Principe de superposition)**.** *Soit δ_1 et δ_2 deux fonctions continues sur J. On considère encore (a, b, c) trois scalaires avec $a \neq 0$.*

Si y_1 et une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \delta_1$ et si y_2 est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \delta_2$; alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \delta_1 + \delta_2$

Théorème 16 (Problème de Cauchy pour le second ordre à coefficients constants)**.** *Soit $t_0 \in J$ ainsi que y_0 et d_0 deux réels quelconques. Alors il existe une et une unique fonction y qui soit solution de (E_2) et qui vérifie en plus la condition $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \text{et } y'(t_0) = d_0 \end{cases}$. Cette fonction est dite* solution du problème de Cauchy *associé à l'équation (E_2) et à la condition initiale $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \text{et } y'(t_0) = d_0 \end{cases}$.*

2.2.2 Comment trouver en pratique une solution particulière ?

À suivre