# Colles semaine 13

## En bref

- Équations différentielles linéaire d'ordre 1 ou 2 :
  - Cas homogène.
  - Recherche de solution par variation de la constante. Structure de l'ensemble des solutions connaissant celles de l'équation homogène associé.
  - Problème de Cauchy du premier ordre et deuxième ordre.
  - Cas homogène à coefficients constant
  - Structure de l'ensemble des solutions connaissant celles de l'équation homogène associé. Principe de superposition.
  - Pour le second membre, recherche de solution particulière lorsque le second membre est de type $P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ pour un polynôme $P$ et un scalaire $\alpha$ donnés.

  Éléments d'analyse asymptotique :
  - Suites dominé, négligeables ou équivalentes. Notation $u_n = O(w_n)$ ; $u_n = o(w_n)$ et $u_n \sim w_n$.
  - Extension aux fonctions.
  - Notion de développement limité d'une fonction.
  - Équivalence logique entre dérivabilité et existence de développement limité.
  - Formules de Taylor-Young pour les ordres supérieurs.
  - Calcul pratique, par opérations analytique, notamment primitivation de DL.

## Exemples non exhaustifs de questions de cours

*Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.*

- Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou un exemple approchant.
- Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$ ou un exemple approchant.
- Pour deux suites $u$ et $w$, montrer l'équivalence logique $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \iff u_n - w_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n)$.
- Montrer qu'une fonction et dérivable en $a$ si et seulement si elle admet un Dl d'ordre 1 en $a$.
- Déterminer un DL d'ordre $n$ de arctangente en zéro (à partir de mercredi uniquement).

## Note aux colleurs

- Nous avons introduit la notation Vect$(\dots)$ pour décrire l'ensemble des solutions d'une équation différentielles linéaire homogène. Les étudiants sont libres de l'utiliser ou non.
- Pour les colles du lundi, on évitera de demander des calculs de DL trop subtils. On préfèrera éventuellement faire admettre un DL d'ordre donné et demander à l'étudiant de l'utiliser pour calculer une limite indéterminée par exemple.

# En détail

# Équations polynomiales complexes

Reprise du programme précédent

## 1 Équations différentielles linéaire d'ordre 1

Reprise du programme précédent

## 2 Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Reprise du programme précédent avec en bonus :

#### 2.0.1 Comment trouver en pratique une solution particulière ?

**Méthode 1** (Recherche de solution particulière pour le second membre)**.** On suppose qu'il existe un scalaire $r$ et un polynôme $P$ tel que $\forall x \in J, \delta(x) = P(x)\mathrm{e}^{rx}$.

Autrement dit, on cherche à résoudre l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = P(x)\mathrm{e}^{rx}$.

On cherche alors une solution sous la forme $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{rx}$ où $Q$ est un polynôme dont le degré vérifie :

— Si $r$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $\deg(Q) = \deg(P)$

— Si $r$ est racine simple de l'équation caractéristique (c'est-à-dire qu'il existe une autre racine distincte de $r$), alors $\deg(Q) = 1 + \deg(P)$

— Si $r$ est racine double de l'équation caractéristique (c'est-à-dire qu'elle est la seule racine de l'équation caractéristique), alors $\deg(Q) = 2 + \deg(P)$

*Remarque* 2. En traitant le cas $r = 0$, on traite le cas des second membre polynomiaux.

*Remarque* 3. Si le second membre est de la forme $P(x)\sin(rx)$ pour un certain polynôme $P$, alors on applique également la méthode en écrivant $\sin(rx) = \frac{\mathrm{e}^{irx} - \mathrm{e}^{-irx}}{2\mathrm{i}}$ puis en appliquant le principe de superposition. Même principe pour le cosinus.

**Lemme 4** (principe de superposition)**.** *Soit $\delta_1$ et $\delta_2$ deux fonctions continues sur $J$. On considère encore $(a, b, c)$ trois scalaires avec $a \neq 0$.*

*Si $y_1$ et une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \delta_1$ et si $y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \delta_2$ ; alors , pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \lambda\delta_1 + \mu\delta_2$*

## 3 Comparaison asymptotique des suites

**Définition 5** (Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang)**.** Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat (c'est-à-dire une affirmation dont la valeur de vérité dépend d'une variable $n$) d'une variable entière. On dit que $\mathcal{P}(n)$ est vrai *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier $N$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \mathcal{P}(n)$.

### 3.1 Suites négligeables et dominées

**Définition 6.** Soit $u$ une suite et $v$ une suite asymptotiquement non nulle, c'est-à-dire que pour $n$ assez grand $v_n \neq 0$. Alors on peut définir à partir d'un certain rang la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ et alors :

i) on dit que $u_n = O(v_n)$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

ii) on dit que $u_n = o(v_n)$ si la suite $n \mapsto \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.

*Remarque* 7. Dans les notations « $u_n = o(v_n)$ ou « $u_n = o(v_n)$ », la variable $n$ est muette.

**Proposition 8** (Dominations classiques)**.** *Nous traduisons les résultats classiques de croissances comparées à l'aide de cette nouvelle notation. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels, alors :*

*i)* *si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$,*

*ii)* *si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $\beta > 1$, $n^\alpha = o(\beta^n)$,*

*iii)* *si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $-1 < \beta < 1$, $\beta^n = o(n^\alpha)$,*

*iv)* *si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $\beta > 0$, $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$,*

*v)* *si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $\beta < 0$, $n^\beta = o((\ln n)^\alpha)$,*

*vi)* *si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^n = o(n!)$*

*vii)* *$n! = o(n^n)$.*

### 3.2 Suites équivalentes

**Définition 9.** Soit $u$ une suite et $v$ une suite asymptotiquement non nulle. On dit que $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1. Et alors $u$ est également asymptotiquement non nulle.

*Remarque* 10. La relation "être équivalente à" est symétrique, c'est-à-dire que $u_n \sim v_n$ si et seulement si $v_n \sim u_n$.

**Proposition 11** (Lien entre suites équivalentes et suites négligeables)**.** *Soit $u$ et $v$ deux suites :*

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(u_n) \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

### 3.3 Opérations sur les relations de comparaison

**Lemme 12.** *La relation de négligeabilité est transitive, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned}
u_n = O(v_n) \ \text{ et } \ v_n = O(w_n) &\Longrightarrow u_n = O(w_n)\\
u_n = o(v_n) \ \text{ et } \ v_n = O(w_n) &\Longrightarrow u_n = o(w_n)\\
u_n = O(v_n) \ \text{ et } \ v_n = o(w_n) &\Longrightarrow u_n = o(w_n)\\
u_n = o(v_n) \ \text{ et } \ v_n = o(w_n) &\Longrightarrow u_n = o(w_n)
\end{aligned}$$

**Proposition 13** (Opérations sur les équivalents)**.** *Soit $u$, $v$, $w$ et $x$ quatre suites réelles. Alors :*

*i)* $\big(u_n \sim v_n \ \text{ et } \ x_n \sim w_n\big) \Longrightarrow u_n x_n \sim v_n w_n$ ;

*ii)* $\big(u_n \sim v_n \ \text{ et } \ x_n \sim w_n\big) \Longrightarrow \dfrac{u_n}{x_n} \sim \dfrac{v_n}{w_n}$ ;

*iii)* *si les suites $u_n$ et $v_n$ sont positives ; pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :* $u_n \sim v_n \Longrightarrow {u_n}^\alpha \sim {v_n}^\alpha$ .

**Proposition 14** (Opérations sur les dominations)**.** *Soit $u$, $v$ , $u'$ et $v'$ quatre suites.*

$$\begin{aligned}
u_n = O(v_n) \ \text{ et } \ w_n = O(v_n) &\Longrightarrow u_n + w_n = O(v_n)\\
u_n = O(v_n) \ \text{ et } \ u'_n = O(v'_n) &\Longrightarrow u_n u'_n = O(v_n v'_n)\\
u_n = o(v_n) \ \text{ et } \ x_n = O(w_n) &\Longrightarrow u_n x_n = o(v_n w_n)\\
\big(u_n = o(v_n) \ \text{ et } \ u'_n = o(v_n)\big) &\Longrightarrow u_n + u'_n = o(v_n)\\
\big(u_n = o(v_n) \ \text{ et } \ u'_n = O(v'_n)\big) &\Longrightarrow u_n u'_n = o(v_n v'_n)
\end{aligned}$$

## 4 Généralisation aux fonctions

Dans tout ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On va ici étudier le comportement local de ces fonctions au voisinage d'un point ou d'une extrémité $a$ de $I$, ainsi, $a$ peut être réel ou $a = \pm\infty$. Dans les définitions qui suivent, on suppose que $g$ ne s'annule pas sur $I$, sauf éventuellement en $a$.

### 4.1 Définitions

**Définition 15.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions :

i) On dit que $f$ est dominée par $g$ au voisinage de $a$ si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $a$. On note alors

ii) On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $a$ si $\frac{f}{g}$ admet une limite nulle en $a$. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$ et on dit que "$f$ est un petit $o$ de $g$ au voisinage de $a$".

iii) On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$ si $\frac{f}{g}$ admet pour limite 1 en $a$. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ et on dit que "$f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$".

**Proposition 16.** *Soient de plus $h$ et $k$ deux fonctions définies sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $I$ privé de $a$. Alors,*

*i) si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k$, alors, $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)k(x)$* (compatibilité avec le produit) *;*

*ii) si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$, alors, $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to aa}{\sim} \frac{g(x)}{k(x)}$* (compatibilité avec le quotient) *;*

*iii) si, sur $I$ privé de $a$, ces fonctions sont strictement positives, alors*

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow f(x)^{\alpha} \underset{x\to a}{\sim} g(x)^{\alpha}.$$

### 4.2 Séquentialisation des relations fonctionnelles

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de composition de limites.

**Théorème 17** (Séquentialisation d'une relation de domination/négligeabilité/équivalence fonctionnelle)**.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage d'un même réel $a$.*

*Soit également une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ce même réel $a$. Alors on peut écrire les implications suivantes :*

*i)* $\left(f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \text{ et } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = a\right) \Longrightarrow f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} o(g(u_n)).$

*ii)* $\left(f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \text{ et } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = a\right) \Longrightarrow f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} O(g(u_n)).$

*iii)* $\left(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ et } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = a\right) \Longrightarrow f(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} g(u_n).$

### 4.3 Croissances comparées

Dans toute cette partie, $a$ et $b$ désignent des réels. On fera attention que les comparaisons sont souvent très différentes en l'infini et en zéro.

**Proposition 18** (Fonctions puissances)**.** *Pour deux réels $a$ et $b$, en supposant $a < b$*

*i)* $x^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b).$

*ii)* $x^b \underset{x\to 0}{=} o(x^a).$

**Corollaire 19** (Cas des polynômes)**.** *Si $(a_p,\dots,a_n)$ sont des réels vérifiant $a_p\neq 0$ et $a_n \neq 0$ et si $P$ est un polynôme s'écrivant $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x) = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k x^k$, alors*

$P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$ *et* $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ .

**Proposition 20** (Fonctions logarithmes et puissances)**.** *Pour deux réels $a$ et $b$* ***strictement positifs*** *(le lecteur adaptera les cas négatifs à l'aide du passage à l'inverse, cf. proposition 16) :*

*i)* $(\ln(x))^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b).$

*ii)* $x^b \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{|\ln x|^a}\right).$

**Proposition 21** (Fonctions géométrique et polynômes)**.** *Pour $a$ et $q$ deux réels strictement positifs :*

*i) Si* $q > 1$*, alors* $x^a \underset{x\to+\infty}{=} o\left(q^x\right)$.

*ii) Si* $0 \leqslant q < 1$*, alors* $q^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^a}\right)$.

**Proposition 22** (La suite des factorielles)**.** *Pour un réel* $q$ *vérifiant* $|q| \geqslant 1$ *:*

*i)* $q^n \underset{n\to\infty}{=} o\left(n!\right)$.

*ii)* $n! \underset{n\to\infty}{=} o\left(n^n\right)$.

# 5 Développements limités

**Définition 23** (Développement limité)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a$ un réel et soit $f$ une fonction définie sur un voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$. On dit que $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $a$ (parfois abrégé en $\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(a+x) + o(x^n).$$

*Remarque* 24. Si $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ en $a$, on dispose donc de coefficients $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ vérifiant :

$$f(a+x) = \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

*Remarque* 25 (Unicité de la partie régulière d'un développement limité). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a$ un réel et soit $f$ une fonction définie sur un voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$. On suppose que $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $a$. Alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ de degré au plus $n$ tel que :

$$f(a+x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n).$$

Ce polynôme $P$ est parfois appelé la *partie régulière* du développement limité.

## 5.1 Cas de l'ordre 1

**Proposition 26** (Développements limités d'ordre 1)**.** *Si* $f$ *est une fonction dérivable en* $a$*, alors* $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + xf'(a) + o(x)$*. Autrement dit, si* $f'(a) \neq 0$*, alors :* $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.

**Proposition 27** (Réciproque)**.** *Si* $f$ *est une fonction définie sur un voisinage de* $a$ *et s'il existe une constante* $K$ *telle que* $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + Kx + o(x)$ *; alors* $f$ *est dérivable en* $a$ *et* $f'(a) = K$.

## 5.2 Ordre quelconque

### 5.2.1 Formule de Taylor

**Théorème 28** (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit* $a$ *un réel et* $f$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur un intervalle* $I$ *d'intérieur non vide contenant 0. Alors, pour tout* $x \in I$*,*

$$f(a+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x^n).$$

**Application 29.** Voici une série de développement limités en zéro classiques et à connaître :

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\ , \qquad (\text{pour } \alpha \in \mathbb{R})\ ,
\end{aligned}
$$

en particulier :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\\
\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)2^{2n}}x^n + o(x^n)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

### 5.2.2 Autres considérations pratiques

## 5.3 Manipulations de développements limités

**Proposition 30** (On peut primitiver les DL)**.** *Soit $f$ admettant un développement limité d'ordre $n$ en zéro donné par $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.*

*Alors toute primitive de de $f$ notée $F$ admet également un développement limité* ***d'ordre*** *$n+1$ donné par :*

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

**Attention !** Ne pas oublier le terme constant $F(0)$.

**Proposition 31** (Application d'un Dl en $x^p$)**.** *Soit $f$ une fonction admettant un développement limité en 0 de type : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.*

*Alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a un développement limité* ***d'ordre*** *$np$ de $f(x^p)$ donné par :*

$$f(x^p) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{kp} + o(x^{np}).$$

**Application 32.** On en déduit immédiatement le développement limité d'arctangente (en primitivant $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$)

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

En raisonnant par identification des coefficients, on trouve également un développement de tangente à la précision de son choix. L'ordre 4 est à connaître :

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

**Attention !** On ne peut pas en général dériver un DL