Colles semaine 14

En bref

- Éléments d'analyse asymptotique :
  - Suites dominé, négligeables ou équivalentes. Notation $u_n = O(w_n)$; $u_n = o(w_n)$ et $u_n \sim w_n$.
  - Extension aux fonctions.
  - Notion de développement limité d'une fonction.
  - Équivalence logique entre dérivabilité et existence de développement limité.
  - Formules de Taylor-Young pour les ordres supérieurs.
  - Calcul pratique, par opérations analytique, notamment primitivation de DL.
  - Développement limités des composées, calculs pratiques. (Pas de résultats théoriques à connaître).
- À propos de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
  - Valeur absolues : définition, résolution d'équation avec valeurs absolues. Inégalité triangulaire.
  - Partie entière, notation $\lfloor x \rfloor$. Définition et inégalité caractéristiques. Résolution d'équation avec parties entières.
  - Ensembles minorés, majorés, bornés. Notion de majorants/minorants et maximum/minimum.
  - Définition des bornes supérieures et inférieures. Caractérisation en ε.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer qu'une fonction et dérivable en a si et seulement si elle admet un DL d'ordre 1 en a.
- Déterminer un DL d'ordre n de arctangente en zéro.
- Déterminer un développement limité d'ordre 5 de tangente en zéro. Méthode au choix de l'étudiant mais celle vue en cours est la primitivation de $1 + \tan^2$.
- Résoudre l'équation $|x - 1| + 2x = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ ou un exemple analogue.
- Définir la partie entière et montrer l'équivalence $\lfloor x \rfloor = n \iff \begin{cases} n \leqslant x < n+1 \\ n \in Z \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 < n \leqslant x - 1 \\ n \in Z \end{cases}$.

Note aux colleurs

- On ne consacrera pas plus de 15 minutes de colles (question de cours comprise) à l'étude des bornes supérieures, valeurs absolues ou parties entières.
- Le programme officiel recommande la notation $\sup(A) = +\infty$ lorsque l'ensemble A est non majoré.

En détail

Analyse asymptotique

Reprise du programme précédent avec en plus

Méthode pour calculer un développement limité de composées

.

Méthode 1. Supposons que l'on veuille calculer un développement limité de la fonction $(f \circ g)$ au voisinage de zéro.

i) On vérifie que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Sinon, si la limite est finie égale à ℓ, on pose alors $\tilde{g} = g - \ell$ qui a bien une limite nulle et on se ramène à cette hypothèse. Si g n'a pas de limite finie en 0, on est probablement en train de faire n'importe quoi.

ii) On suppose donc dorénavant que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

iii) On cherche un entier $p \geqslant 1$ tel que $g(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^p)$. On en déduira que $o\Big(g(x)^n\Big) = o(x^{np})$ pour tout entier n.

iv) On choisit alors l'entier n tel que $o(x^{np})$ donne la précision voulue. Par exemple, pour avoir un développement d'ordre q de $f \circ g$, on choisira $n = \frac{q}{p}$ arrondi à l'entier supérieur.

v) On écrit alors un développement limité de f de type $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ pour ce n choisi.

vi) On calcule un développement limité à l'ordre voulu de chaque terme $g(x)^k$ apparaissant dans la somme précédente. On élude donc tous les termes superflus.

vii) On recombine le tout et on conclut.

À propos de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

1 Prologue : Propriétés axiomatiques

Axiome 2. La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vérifie les quatre axiomes suivants :

i) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \implies (x \leqslant z)$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$.

iii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \implies (x = y)$.

iv) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)$.

Définition 3. Pour un couple de réel (x, y), on note :

— $x < y$ le prédicat $(x \leqslant y \text{ et } x \neq y)$,

— $x \geqslant y$ le prédicat $y \leqslant x$,

— $x > y$ le prédicat non $(x \leqslant y)$.

Enfin, cette relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication au sens suivant :

Axiome 4. Soit (x, y, z, t) quatre réels. Alors, on a

i) $(x \leqslant y \text{ et } z \leqslant t) \implies (x + z \leqslant y + t)$.

ii) $(0 \leqslant x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant t) \implies (xz \leqslant yt)$.

2 Valeurs absolues

2.1 Définition et rappels

Définition 5. Pour un réel x, on définit la valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 6. *La fonction valeur absolue :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ *est positive et continue sur* $\mathbb{R}$ *; dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *mais non dérivable en zéro ; strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

Lemme 7. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \sqrt{x^2}$

2.2 Variations autour de l'inégalité triangulaire

Lemme 8 (Inégalité triangulaire, version réelle)**.** *Pour tout couple* (x, y) *de réels, on a* $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ *avec égalité si et seulement si* x *et* y *sont de même signe.*

Proposition 9 (Inégalité triangulaire sur les sommes)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Alors*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Proposition 10 (Inégalité triangulaire sur les intégrales)**.** *Soit* $[a\,;\,b]$ *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur* $[a\,;\,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Alors :*

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 11. Le lecteur s'assurera que cela a bien un sens en prouvant que la fonction $|f|$ est bien continue sur $[a\,;\,b]$.

3 Ensembles majorés, minorés, bornés

Définition 12 (Majorant, minorant)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x un réel.
- On dit que x est un majorant de A si $\forall a \in A,\ a \leqslant x$.
- On dit que x est un minorant de A si $\forall a \in A,\ x \leqslant a$.

Définition 13 (Ensembles majorés , minorés, bornés)**.** Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dit majoré s'il admet au moins un (et alors une infinité de) majorant ; il est dit minoré s'il admet au moins un (et alors une infinité de) minorant ; il est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.

Définition 14 (Maximum, minimum)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et m un réel.
- On dit que m est un maximum de A si m est un majorant de A et que $m \in A$.
- On dit que m est un minimum de A si m est un minorant de A et que $m \in A$.

Lemme 15. *Tout minimum d'un ensemble est un minorant de cet ensemble mais la réciproque est fausse en général*

Théorème 16. *Un minimum (ou un maximum) s'il existe est unique. On peut donc parler* du *minimum d'un ensemble* A *(en cas d'existence) que l'on note* $\min(A)$.

Théorème 17. *Tout sous-ensemble non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un minimum.*

Théorème 18. *Tout sous-ensemble non vide de* $\mathbb{Z}$ *admet :*
- *un minimum s'il est minoré,*
- *un maximum s'il est majoré.*

Théorème 19. *Tout sous-ensemble* ***fini*** *et non vide de* $\mathbb{R}$ *admet un minimum et un maximum.*

3.1 Une application, la partie entière

Proposition-Définition 20 (Partie entière)**.** *Soit x un réel, l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ est non vide et bien évidemment majoré par x, il admet donc un maximum que l'on appelle partie entière de x et que l'on note $\lfloor x \rfloor$.*

Il résulte de cette définition les caractérisations suivantes :

Proposition 21. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes*

$$k = \lfloor x \rfloor \iff \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } x - 1 < k \leqslant x \end{cases} \iff \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } k \leqslant x \leqslant k + 1 \end{cases} .$$

Ou encore un autre point de vue, si on préfère :

Proposition 22 (Décomposition en partie entière et fractionnaire)**.** *Soit x un réel. Alors, il existe un unique couple $(k, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } \varepsilon \in [0\,;\,1[\\ \text{et } x = k + \varepsilon \end{cases}$. L'entier k de ce couple est alors la partie entière. Le réel ε, s'appelle parfois* partie fractionnaire *de x.*

Enfin, résumons les propriétés de la fonction partie entière :

Proposition 23. *La fonction $E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ est :*

i) croissante,

ii) continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

iii) discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$ (mais continue à droite en ces points).

4 Bornes supérieures et inférieures

4.1 Définitions et exemples

Le lecteur aura remarqué que l'ensemble $[0\,;\,1[$ n'admet pas de maximum. En revanche, le nombre 1 semble jouer un rôle particulier parmi les majorants de cet ensemble. Il s'agit en fait du plus petit des majorants. Cette observation conduit à la définition de borne supérieures.

Définition 24 (Bornes supérieures et inférieures)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et m un réel. S'il existe, on appelle borne supérieure de A le plus petit majorant de A ; c'est-à-dire le minimum de l'ensemble des majorants de A. On appelle de même borne inférieure de A, le plus grand minorant de A, s'il existe.

Remarque 25. Dans le cas où l'ensemble A n'est pas majoré, le programme recommande la notation $\sup(A) = +\infty$. De même, si A n'est pas minoré, alors on notera $\inf(A) = -\infty$.

Nous donnerons maintenant les résultats sur les bornes supérieures. Le lecteur, à titre d'exercice, essaiera d'écrire et de prouver tous les résultats analogues concernant les bornes inférieures.

Lemme 26. *Un ensemble non majoré n'admet pas de borne supérieure. De plus, la borne supérieure de A si elle existe est unique et se note* $\sup(A)$.

Proposition 27. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors il admet aussi une borne supérieure et* $\max(A) = \sup(A)$.

Lemme 28 (Réciproque partielle de la proposition précédente)**.** *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure. Alors, deux cas peuvent se présenter :*

i) Soit $\sup(A)$ *appartient à l'ensemble A, et dans ce cas,* $\sup(A)$ *est également le maximum de A.*

ii) Soit $\sup(A)$ *n'appartient pas à l'ensemble* A*, et dans ce cas,* A *n'admet pas de maximum.*

Théorème 29 (Théorème de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)**.** *Tout sous-ensemble* non-vide et majoré *de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure. Tout sous-ensemble* non-vide et minoré *de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Remarque 30. Ce théorème peut en fait être considéré comme un axiome dans la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$.

4.2 Caractérisation et recherche pratique de bornes supérieures/inférieures

Proposition 31 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *et* s *un réel. Il est équivalent de dire que* s *est la borne supérieure de* A *et :*

i) s *est un majorant de* A*,*

ii) et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$*.*

Ceci fournit une méthode pour rechercher u la borne supérieure d'un ensemble.

Méthode 32. Soit A une sous-ensemble (non vide, sinon c'est vraiment évident) de $\mathbb{R}$. Pour chercher la borne supérieure, on peut employer l'algorithme suivant :

i) On commence par chercher un majorant.
   - Si l'ensemble n'est pas majoré, alors A n'admet pas de borne supérieure réelle, on notera $\sup(A) = +\infty$.
   - Si l'ensemble admet un majorant, alors il admet une borne supérieure réelle finie par le théorème de la borne supérieure. On poursuit alors l'algorithme

ii) On détermine explicitement un majorant de A que l'on note M. On se demande ensuite si M est un élément de A.
   - Si $M \in A$, alors il s'agit du maximum de A et donc de la borne supérieure de A. On a terminé.
   - Si $M \notin A$, on essaie alors de prouver que $M = \sup(A)$ en appliquant la caractérisation [1] en epsilon.
   - Si on échoue à prouver ceci, alors il est probable que M ne soit pas la borne supérieure. Dans ce cas, on cherche un autre majorant M' strictement inférieur à M. On reprend alors à l'algorithme à l'étape numéro **??**.

1. ou caractérisation séquentielle lorsqu'on l'aura vu ; cela est légèrement plus simple en pratique.