Colles semaine 15

En bref

- Exemples d'étude asymptotique de suites définies implicitement ou de suites définies par une intégrale.
- À propos de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
  - Valeur absolues : définition, résolution d'équation avec valeurs absolues. Inégalité triangulaire.
  - Partie entière, notation $\lfloor x \rfloor$. Définition et inégalité caractéristiques. Résolution d'équation avec parties entières.
  - Ensembles minorés, majorés, bornés. Notion de majorants/minorants et maximum/minimum.
  - Définition des bornes supérieures et inférieures. Caractérisation en ε.
- Suites arithmético-géométrique.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Résoudre l'équation $|x-1|+2x=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ ou un exemple analogue.
- Définir la partie entière et montrer l'équivalence $\lfloor x \rfloor = n \iff \begin{cases} n \leqslant x < n+1 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 < n \leqslant x-1 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
- Donner une expression de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1+i)u_n + 1 \end{cases}$ ou un exemple analogue.
- Donner une expression de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_n + 1 - u_n \end{cases}$ ou un exemple analogue.

Note aux colleurs

- Le programme officiel recommande la notation $\sup(A) = +\infty$ lorsque l'ensemble A est non majoré.
- Nous n'avons pas encore fait d'exercice étudiant des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 avec second membre.

En détail

Analyse asymptotique

Reprise du programme précédent en mettant l'accent sur les suites implicites et suites d'intégrales.

À propos de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Reprise du programme précédent

1 Suites récurrentes linéaires

1.1 Cas des suites récurrentes d'ordre 1

On se donne deux réels a et b fixés et on s'intéresse à une suite u vérifiant l'équation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \tag{E_1}$$

- Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique.
- Si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique.
- Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on dit que c'est une suite arithmético-géométrique et on utilise le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit u une suite vérifiant (E_1) avec $a \neq 1$. Alors il existe une unique valeur de α telle que la suite $w := (u - \alpha)$ soit une suite géométrique de raison a. De plus α est l'unique point fixe de la relation de récurrence (E_1). C'est-à-dire que $\alpha = a\alpha + b$.*

1.2 Cas des suites récurrentes d'ordre 2

On se donne trois scalaires (complexes ou réels) a, b et c fixés avec $a \neq 0$ et on s'intéresse à une suite u vérifiant l'équation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \tag{E_2}$$

On notera $\mathcal{E}_{a,b,c}$ l'ensemble des suites vérifiant cette relation.

Lemme 2 (Stabilité par combinaison linéaire)**.** *L'ensemble $\mathcal{E}_{a,b,c}$ est stable par combinaison linéaire. C'est-à-dire que pour toutes suites $u \in \mathcal{E}_{a,b,c}$ et $v \in \mathcal{E}_{a,b,c}$, on a :*

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,\ (\alpha u + \beta v) \in \mathcal{E}_{a,b,c}.$$

Lemme 3 (La suite u est déterminée par ses deux premiers termes)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une et une unique suite u vérifiant les trois conditions suivantes :* $\begin{cases} u \in \mathcal{E}_{a,b,c} \\ u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \end{cases}$.

Théorème 4 (Résolution de E_2, version complexe)**.** *On appelle équation caractéristique de E_2, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On suppose également que b et c ne sont pas simultanément nul (c'est un cas particulier légèrement problématique.)*

- *Si l'équation caractéristique admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ distinctes, notées r_1 et r_2 (ce qui correspond donc au cas où $\Delta \neq 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

- *Si l'équation caractéristique admet une solution et une seule dans $\mathbb{C}$, notée r_0 (ce qui revient à $\Delta = 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(\lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Théorème 5 (Résolution de E_2, version réelle)**.** *On suppose que a, b et c sont* ***réels*** *avec $a \neq 0$ et on s'intéresse aux suites réelles de $\mathcal{E}_{a,b,c}$. On appelle équation caractéristique de E_2, l'équation $ar^2+br+c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{R}$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On suppose également que b et c ne sont pas simultanément nul (c'est un cas particulier légèrement problématique.)*

- *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes, notées r_1 et r_2 (ce qui correspond donc au cas où $\Delta > 0$), alors,*
$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Si l'équation caractéristique admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$, notée r_0 (ce qui revient à $\Delta = 0$), alors,*
$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(\lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Si l'équation caractéristique n'a pas de solution réelle (c'est-à-dire $\Delta < 0$), alors, en notant $r = \rho e^{i\theta}$ une des deux solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique (avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$) on a :*
$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(\rho^n(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}\,;\;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque 6. Bien sûr toute suite réelle peut être vue comme une suite complexe. On peut donc utiliser la résolution en version complexe, puis extraire parmi les solutions les suites qui sont à valeurs réelles. Ceci peut demander quelques calculs et réflexions non immédiates. Aussi est-il utile de connaître directement la formule précédente donnant tout de suite les solutions réelles.

1.3 Exemples de généralisation

1.3.1 Avec un second membre

Si on a une équation de récurrence avec second membre. C'est-à-dire qu'on s'intéresse à une suite u vérifiant l'équation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d \qquad (E_2^d)$$

pour des scalaires (a, b, c, d) fixés avec $d \neq 0$.

Alors On cherche une solution particulière puis on utilise le résultat suivant.

Théorème 7 (Structure des solutions d'une équation de récurrence affine)**.** *Si w est une suite qui est solution de (E_2^d), alors l'ensemble $\mathcal{E}_{a,b,c}^d$ des solutions de (E_2^d) s'écrit :*

$$\mathcal{E}_{a,b,c}^d = \{w + u \mid u \text{ solution de } (E_2)\}$$

Méthode 8. Quelques idées pour trouver des solutions de (E_2^d) :

- Si $a+b+c \neq 0$, alors l'équation de récurrence admet un unique point fixe, c'est l'unique solution de l'équation $a\alpha + b\alpha + c\alpha = d$. Et dans ce cas, la suite constante égale à α est une solution particulière.
- Si $a + b + c = 0$, on cherche une solution particulière de type $u = (n \mapsto \lambda n)$. Il suffit donc de résoudre l'équation $2\lambda a + b\lambda = d$. Celle ci admet une solution si et seulement si $(2a + b) \neq 0$.
- Si $a + b + c = 0$ et $2a + b = 0$, alors on cherche une solution de type $u = \big(n \mapsto \mu n^2\big)$.

Si on a une équation avec un second membre non constant, type :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = v_n$$

pour des scalaires (a, b, c) fixés et une suite v fixée, on s'adapte.