Colles semaine 17

En bref

- Suites arithmético-géométrique.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Définition des limites de suites (réelles et complexes).
- Propriété algébrique des limites.
- Propriétés prouvant la convergence : suites adjacentes, théorème de limite monotone et théorème des gendarmes.
- Cas des sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
- Exemple d'études de suites définie par une relation de type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer que la limite d'une suite si elle existe est unique (On se limitera au cas des limites finies).
- Montrer que les suites convergentes sont bornées.
- Citer et montrer la propriété de passage à la limite des inégalités.
- Montrer que si une suite u converge vers $\ell > 0$; alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.
- Montrer qu'une suite u converge si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. *Variante possible avec limite infinies*
- Soit u une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$. Montrer que la suite u converge vers 1.

Note aux colleurs

- Pour les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, aucun théorème général ne figure au programme . Les élèves doivent démontrer chaque assertion.

En détail

1 Limites de suites

1.1 Suites convergentes

1.1.1 Définition formelle de limite

Définition 1 (Convergence d'une suite vers un réel)**.** On dit qu'une suite réelle u converge vers un réel ℓ ou encore qu'elle admet ℓ pour limite si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon. \qquad (\mathcal{P}_{\lim})$$

On note alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

Attention ! La question de l'existence d'une limite pour une suite donnée est, en générale délicate. On n'emploiera donc jamais la notation $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ avant d'avoir prouvé ou supposé que cette limite existe.

Définition 2. Soit $\mathcal{P}(x)$ un prédicat, on dit que la suite u vérifie $\mathcal{P}(u_n)$ à partir d'un certain rang (parfois abrégé en APCR) s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \implies \mathcal{P}(u_n)$. Autrement dit la propriété $\mathcal{P}(u_n)$ est vraie pour tous les entiers n sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux. On comprendra donc que, dans cette écriture, la variable n est encore une fois muette

Lemme 3 (Traduction de la définition de limite)**.** *Soit u une suite et ℓ un réel. Alors la suite u converge vers ℓ si et seulement si pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ, les réels u_n appartiennent à I à partir d'un certain rang.*

1.1.2 Quelques conséquences théoriques

Voici une liste de cinq propriétés qui se montrent à partir de la définitions formelle de limite. Vous devez savoir faire cela et cela est une excellente illustration du genre de preuves que l'on peut exiger de vous.

Proposition 4. *Si une suite réelle converge vers un réel, alors elle est bornée.*

Proposition 5. *Si une suite converge vers une limite, alors cette limite est unique.*

Proposition 6. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Si une suite u converge vers un réel $\ell > a$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geqslant 0$.*

Remarque 7. Il est crucial dans la proposition précédente que ℓ soit **strictement supérieur** à a. Cherchez un contre-exemple lorsque $\ell = a$.

Proposition 8 (Passage à la limite des inégalités)**.** *Soit a un réel et u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < a$. Alors, si la suite u converge vers ℓ, on a l'inégalité **large** suivante : $\ell \leqslant a$.*

Proposition 9 (Caractérisation de la convergence par les sous-suites de rang pair et impair)**.** *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.*

Un étudiant de PTSI doit savoir démontrer les propriétés 4 à 9.

Remarque 10. La proposition 9 peut également être utilisé pour prouver la divergence d'une suite par contraposition. Par exemple, il est aisé de montrer avec cette proposition que la suite $(-1)^n_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

1.2 Limites infinies pour les suites réelles

1.2.1 Définitions

Définition 11 (Limites infinies)**.** On dit qu'une suite réelle u admet pour limite $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow u_n \geqslant A.$$

On dit qu'une suite u admet pour limite $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow u_n \leqslant A.$$

Remarque 12. La terminologie de « suites convergentes » est réservée à celles qui admettent des limites finies. Les suites admettant des limites infinies sont dites divergentes, tout comme celles qui n'admettent pas de limites.

1.2.2 Propriétés élémentaires

Nous reprenons les propriétés 4 à 9 et nous les généralisons au cas des limites éventuellement infinies.

Proposition 13. *Si une suite réelle admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.*

Proposition 14. *Soit u une suite admettant $+\infty$ pour limite. Alors u est minorée et n'est pas majorée. De même si u admet $-\infty$ pour limite, alors elle est majorée mais pas minorée.*

Thèmes de réflexions 15. Peut-on trouver une suite u qui n'est pas majorée et qui ne tend pas vers $+\infty$? Qu'en déduire quant à la réciproque de la proposition précédente ?

Proposition 16. *Si une suite u tend vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geqslant 0$.*

Proposition 17 (Passage à la limite des inégalités)**.** *Soit a un réel et u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < a$. On suppose également que la suite u admette une limite ℓ (finie ou infinie) ; alors, ou bien $\ell = -\infty$ ou bien ℓ est un réel fini vérifiant : $\ell \leqslant a$.*

Proposition 18 (Caractérisation de la limite par les sous-suites de rang pair et impair)**.** *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite commune.*

1.3 Règles de calculs de limites

1.3.1 Quelques limites connues

Le cours de Terminale nous donne plusieurs résultats de limites.

Proposition 19. *Les limites suivantes sont des résultats à connaître.*

i) *Pour tout $\alpha > 0$, $n^\alpha \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.*
ii) *Pour tout $\beta < 0$, $n^\beta \xrightarrow{n\to\infty} 0$.*
iii) $\mathrm{e}^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ *et* $\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
iv) $\ln(n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$
v) *Pour a un réel fixé, la suite de terme général a^n :*
- *diverge vers $+\infty$ si $a > 1$;*
- *converge vers 1 si $a = 1$;*
- *converge vers 0 si $a \in \left]-1\,;1\right[$;*
- *n'a pas de limite si $a \leqslant -1$.*

1.3.2 Sommes et produits

Proposition 20 (Sommes de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite $u+v$.*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

Proposition 21 (Produit de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite uv.*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 22 (Quotient de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite $\frac{u}{v}$. On supposera bien sûr que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1 = 0^+$	$\ell_1 = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0^+$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = 0^-$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = +\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	*F.I.*	*F.I.*
$\ell_2 = -\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	*F.I.*	*F.I.*

Attention ! La notation 0^+ veut dire que la suite converge vers zéro tout en restant positive à partir d'un certain rang. En règle générale si le dénominateur tend vers 0 sans que l'on puisse déterminer son signe et que le numérateur a une limite non-nulle, alors on a affaire à une forme indéterminée. Le quotient peut n'avoir aucune limite dans ce cas ! Exemple de $\frac{1}{(-1)^n \mathrm{e}^{-n}}$.

1.4 Brève extension aux suites complexes

Définition 23. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite z converge si la suite réelle $(|z_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque 24. Il n'existe pas de notion de limite infinie pour les suites complexes.

Proposition 25 (Caractérisation de la convergence par les parties réelles et imaginaires). *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Cette suite converge si et seulement si chacune des suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.*

On rappelle la définition des suites complexes bornées.

Définition 26. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit qu'elle est bornée si la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Lemme 27. *Si une suite (z_n) converge vers un complexe ℓ, alors $|z_n| \xrightarrow{n\to\infty} |\ell|$. La réciproque est fausse en général.*

Thèmes de réflexions 28. Cherchons un contre-exemple qui invalide la réciproque du lemme précédent.

Exemple 29 (Suites géométriques complexes)**.** Pour tout complexe q fixé, la suite complexe de terme général $u_n = q^n$:
— converge vers 0 si $|q| < 1$;
— converge vers 1 si $q = 1$;
— n'a pas de limite et reste bornée si $|q| = 1$ et $q \neq 1$; (Ce point est plus délicat à prouver que le reste).
— n'a pas de limite et diverge en module (c'est-à-dire $|u_n| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$) si $|q| > 1$.

Thèmes de réflexions 30. Cherchons une valeur q de module 1 pour laquelle on sait prouver que la suite de terme général q^n diverge.

2 Prouver l'existence de limites

2.1 Utilisation de la monotonie pour les suites réelles

Théorème 31 (Théorème de limite monotone)**.** *Soit u une suite croissante de réels. Alors la suite u admet une limite. De plus :*
— *Soit la suite u est majorée et alors elle converge vers une limite finie.*
— *Soit la suite u n'est pas majorée et alors sa limite vaut $+\infty$.*

Exercice 32. Adapter ce théorème au cas des suites décroissantes.

Ce théorème (ou plutôt sa preuve) a en plus une conséquence très utile pour la détermination des bornes supérieures.

Application 33 (Caractérisation séquentielle des bornes supérieures)**.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et s un réel. Alors il est équivalent de dire que s et la borne supérieure de A ou que :

$$\begin{cases} s \text{ majore } A \\ \text{et Il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ vérifiant } \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = s. \end{cases}$$

Théorème 34 (Suites adjacentes)**.** *Soit u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si :*
— *L'une des deux suites est croissante.*
— *L'autre suite est décroissante.*
— *La suite $u - v$ converge vers 0.*

Dans ce cas, u et v sont convergentes et convergent vers la même limite ℓ. De plus,
— *Si la suite u est croissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.*
— *Si la suite u est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell \leqslant u_n$.*

Application 35. Soit x un réel. Montrer que les suites définies par $u_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes.

Thèmes de réflexions 36. Pour $x = \pi$, que représentent les suites u et v de l'application précédente.

Corollaire 37. *Pour tout réel x, il existe une suite de rationnels convergeant vers x. On dit que l'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

2.2 Par encadrement, pour les suites réelles

Théorème 38 (Théorème des gendarmes)**.** *Soit u, v et w trois suites réelles. On suppose que*
— *à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,*
— *et u et w converge toutes deux vers la même limite ℓ.*

Alors la suite v est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

On peut également adapter ce théorème pour le cas des limites infinies.

Théorème 39 (Variante DU gendarme)**.** *Soit u et v deux suite réelles vérifiant $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :*
— *si la suite u diverge vers $+\infty$, il en est de même pour la suite v.*
— *si la suite v diverge vers $-\infty$, il en est de même pour la suite u.*

2.3 Cas des suites complexes

Proposition 40 (Version complexe du théorème des gendarmes)**.** *Soit z une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. S'il existe une suite* ***réelle*** *x vérifiant à partir d'un certain rang $|z_n - \ell| \leqslant x_n$ et $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$; alors $z_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.*

3 Éléments d'études de suites récurrentes non linéaires

Dans toute cette section, nous nous fixerons une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nous étudierons les suites u qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad (\mathrm{Rec}_f)$$

Attention ! Tout doit être redémontré dans le contexte de l'exercice. Les théorèmes suivants (à l'exception du corollaire 45 ne figurent pas au programme officiel.

3.1 À propos de la bonne définition de la suite

Définition 41 (Ensembles stables par une fonction)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit qu'un sous-ensemble A de I est stable par f s'il vérifie $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

Remarque 42. On peut traduire cette définition à l'aide de la notion d'image directe. En reprenant les notations de la définition précédente, un ensemble A est stable par f si et seulement si $f(A) \subset A$.

Proposition 43. *Si A est un ensemble stable par f et si $u_0 \in A$, alors la suite u définie par la relation* (Rec_f) *existe bien pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.*

3.2 À propos des limites possibles

Théorème 44 (Admis provisoirement)**.** *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et que u est une suite d'éléments de I convergente vers un réel $\ell \in I$, si de plus la fonction f est* ***continue*** *en ℓ, alors la suite $n \mapsto f(u_n)$ est également convergente et sa limite vaut $f(\ell)$.*

Corollaire 45 (La limite éventuelle de u est un point fixe)**.** *Si la suite u converge vers un point de I et que f est continue sur I, alors sa limite ℓ est un point fixe de f. C'est-à-dire $f(\ell) = \ell$.*

Attention ! Ces théorèmes sont inutiles tant qu'on n'a pas prouvé *l'existence* d'une limite pour u.

3.3 Méthode avec une fonction f croissante

Méthode 46. Si f est croissante sur un intervalle stable I et si $u_0 \in I$, alors on peut montrer par récurrence que la suite u est monotone.

3.4 Méthode avec le signe de $f - \mathrm{Id}$

Méthode 47. Si sur un intervalle stable I, on a $\forall x \in I, f(x) - x \geqslant 0$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$, alors on peut montrer que la suite u est croissante.

3.5 Cas des fonctions décroissantes

Méthode 48. Si f est décroissante sur un intervalle stable I et si $u_0 \in I$, alors on peut montrer que chacune des deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et les monotonies respectives sont opposées.