

Colles semaine 18

En bref

- Exemple d'études de suites définie par une relation de type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Algèbre linéaire : Notion d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels.
- Combinaison linéaire : familles libres, génératrice, base.
- Sous-espace vectoriels engendrés par une famille finie. Notation $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
- *Bonus à partir de mercredi* : Somme de sous-espaces vectoriels. Notion de somme directe

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Soit u une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$. Montrer que la suite u converge vers 1.
- Montrer que l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2iy + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 et en donner une base. *On pourra varier les exemples mais on se limitera à des exemples dans \mathbb{K}^n pour $n \leq 4$.*
- Étudier la liberté de la famille $\left((1, 1, -1), (-1, 1, 1), (2, 1, 2) \right)$ dans \mathbb{R}^3 . *On pourra varier les exemple dans n'importe quel espace vectoriel.*
- Montrer que $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$.
- *Bonus à partir de mercredi* : Rappeler la définition de somme directe. Montrer que $F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Note aux colleurs

- Pour les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, aucun théorème général ne figure au programme . Les élèves doivent démontrer chaque assertion.
- En algèbre linéaire, on n'a pas encore de théorie de la dimension ni d'application linéaire. Je sais que c'est embêtant mais il faut être patient !
- En théorie, le programme de PTSI ne traite pas la somme de plus que deux sous-espaces vectoriels. Comme cela apparaît ensuite en PT et pour éviter de trop s'habituer au critère miraculeux sur l'intersection, nous avons traité ce cas. Mais on évitera les exercices trop subtils sur la somme de plus que deux sous-espaces vectoriels.

En détail

Éléments d'études de suites récurrentes non linéaires

Reprise du programme précédent

Algèbre linéaire

1 La structure d'espace vectoriel

1.1 Définition des espaces vectoriels

Définition 1 (Espace vectoriel). On appelle espace vectoriel sur K ou \mathbb{K} -espace vectoriel la donnée d'un triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble non vide muni d'une addition $E \times E \rightarrow E$ et d'une

multiplication externe $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ vérifiant les huit axiomes suivants :

- i) $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$. (L'addition est associative)
- ii) $\forall (x, y) \in E^2, (x + y) = y + x$. (L'addition est commutative)
- iii) $\exists e \in E, \forall x \in E, e + x = x + e = x$. (Il existe un élément neutre pour l'addition)
- iv) $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = x' + x = e$. (Chaque élément admet un opposé)
- v) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$. (La multiplication externe est associative)
- vi) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$. (Le scalaire 1 est neutre pour la multiplication externe).
- vii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$. (Distributivité de la multiplication externe sur l'addition des scalaires)
- viii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$. (Distributivité de la multiplication externe sur l'addition des vecteurs.)

1.2 Règles de calculs

Proposition-Définition 2. *Tout espace vectoriel admet par définition un élément neutre pour l'addition. C'est-à-dire un élément $e \in E$ vérifiant $\forall x \in E, x + e = e + x = x$. Cet élément est unique et s'appelle le vecteur nul de E . On le note très souvent 0_E .*

Proposition-Définition 3. *Tout vecteur x d'un espace vectoriel E admet par définition un opposé, c'est-à-dire un élément x' vérifiant $x' + x = x + x' = 0_E$. Cet élément est unique et se note normalement $-x$.*

Proposition 4 (Règles de calculs dans un espace vectoriel.). *Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors,*

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E).$$

Où 0_E est l'élément neutre pour l'addition du groupe $(E, +)$.

Par ailleurs :

$$(-\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x).$$

Où le signe "moins" fait référence à l'opposé dans le corps \mathbb{K} pour le premier terme et à l'opposé dans l'espace vectoriel E pour les deux termes suivants.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 5. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il vérifie les trois conditions suivantes :

- i) $0_E \in F$, où 0_E est l'élément neutre pour l'addition de l'espace vectoriel E ;
- ii) $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$,
- iii) $\forall x \in F \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in F$, où l'on note dorénavant λx le résultat de la multiplication externe.

On traduit cela en disant que F est stable par addition et par multiplication externe.

Proposition 6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E . Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- i) F est non vide,
- ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + y \in F$.

Lemme 7. Un bon étudiant de PTSI sait déterminer en moins d'une minute si chacune des parties suivantes est ou non un sous-espace vectoriel.

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2y + iz = 0\}$ dans \mathbb{C}. ii) L'ensemble des complexes imaginaires purs dans le \mathbb{R}-espace vectoriel \mathbb{C} ? iii) L'ensemble des complexes imaginaires purs dans le \mathbb{C}-espace vectoriel \mathbb{C} ? iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 1\}$ dans \mathbb{C} ? v) L'ensemble des matrices symétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? vi) L'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. vii) L'ensemble des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? viii) L'ensemble des fonctions bornées dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? | <ul style="list-style-type: none"> ix) Soit $M \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des fonctions bornées par M dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? x) L'ensemble des fonctions paires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? xi) L'ensemble des fonctions croissantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? xii) L'ensemble des fonctions monotones dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? xiii) L'ensemble des suites convergentes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? xiv) L'ensemble des suites convergentes vers 0 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? xv) L'ensemble des suites convergentes vers 1 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? |
|--|---|

Proposition 8. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de E .

2 Combinaisons linéaires

2.1 Familles libres

Définition 9 (Famille libre). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille (x_1, \dots, x_n) est **libre** si elle vérifie l'implication suivante :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0 \right). \quad (1)$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle de la famille est celle à coefficients tous nuls.

Notons que l'implication réciproque est vérifiée par toute les familles.

On appelle famille **liée** toute famille qui n'est pas libre.

Lemme 10 (Principe d'identification des coefficients d'une combinaison linéaire de famille libre). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille **libre** de vecteurs de E . Alors, pour toutes familles de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i \right). \quad (2)$$

Proposition 11. *Voici une liste de propositions élémentaires à propos des familles libres :*

- i) *Une famille contenant le vecteur nul est liée.*
- ii) *Une famille à un élément est libre si et seulement si l'unique élément de la famille est non nul.*
- iii) *Tous les éléments d'une famille libre sont distincts deux à deux.*
- iv) *Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.*
- v) *Toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.*

Proposition 12. *Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . Alors, la famille (x_1, \dots, x_n) est liée si et seulement si l'un des vecteurs x_i est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.*

2.2 Familles génératrices

Définition 13 (Famille génératrice). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille (x_1, \dots, x_n) est génératrice de E si tout vecteur y de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille (x_1, \dots, x_n) . Autrement dit si :

$$\forall y \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

2.3 Bases

Définition 14. Une famille qui est à la fois une famille libre et une famille génératrice de E est appelée une base de E .

Proposition-Définition 15. *Beaucoup d'espaces vectoriels usuels sont munis de bases « naturelles » dite canonique.*

- *Dans \mathbb{K}^n , la famille (e_1, \dots, e_n) où $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $e_i = \left(0, \dots, 0, \underset{i\text{-ème coef}}{1}, 0, \dots, 0 \right)$ est une base appelé base canonique de \mathbb{K}^n .*
- *Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ définie ci-dessous est une base appelé base canonique de $\mathcal{M}_{n(p)}K$.*

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, E_{i,j} = i \longrightarrow \begin{pmatrix} & & j & & \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- *Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*

2.4 Sous-espaces vectoriels engendrés par une famille

Définition 16. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel engendré par une famille¹ \mathcal{F} de E et on note $\text{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille. Autrement dit : si (x_1, \dots, x_n) est une famille finie, alors :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}. \quad (3)$$

1. le programme officiel se limite au cas où la famille contient un nombre fini de vecteurs

Lemme 17 (le sous-espace engendré par une famille est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteur de E . Alors tout sous-espace vectoriel F de E qui contient la famille (x_1, \dots, x_n) contient encore $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 18. Une famille (x_1, \dots, x_n) d'un espace vectoriel E est génératrice de E si et seulement si $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 19 (Somme de deux sous-espace vectoriel). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle somme de F et G et on note $F + G$ le sous-espace vectoriel :

$$F + G = \{x_F + x_G : x_F \in F, x_G \in G\}. \quad (4)$$

Le lecteur vérifiera que cela définit bien un sous-espace vectoriel.

Définition 20. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit également, (F_1, \dots, F_n) une famille de sous-espaces vectoriels de E . On définit la somme des sous-espaces vectoriels comme le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i=1}^n F_i = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mid x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n \right\}. \quad (5)$$

Le lecteur se convaincra que cette définition coïncide avec la précédente lorsque $n = 2$.

Remarque 21 (La somme de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant chacun des sous-espaces vectoriels). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit également, (F_1, \dots, F_n) une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors, pour tout sous-espace vectoriel G de E on a l'implication suivante :

$$(\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, F_i \subset G) \implies \sum_{i=1}^n F_i \subset G \quad (6)$$

Définition 22 (Somme directe). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit (F_1, \dots, F_n) une famille de sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe et on note $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ si l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \left(\sum_{i=1}^n x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket x_i = 0_E \right). \quad (7)$$

Notons que l'implication réciproque « \Leftarrow » est toujours vérifiée.

Proposition 23. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors, la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Attention : Cela ne se généralise malheureusement pas à plus de deux sous-espaces vectoriels. Le lecteur étudiera attentivement l'exemple dans \mathbb{K}^2 des sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}((1, 0))$, $G = \text{Vect}((0, 1))$ et $H = \text{Vect}((1, 1))$ pour s'en convaincre.

Proposition 24. Dans une somme directe, on a unicité de la décomposition d'un vecteur comme une somme d'élément de chaque sous-espace vectoriel. Plus précisément, si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, n est un entier naturel non nul, (F_1, \dots, F_n) est une famille de sous-espaces vectoriels de E en somme directe et si $x \in F_1 + \dots + F_n$; alors $\exists!(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$, $x = x_1 + \dots + x_n$.

Définition 25. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit (F_1, \dots, F_n) une famille de sous-espaces vectoriels de E . On dit que les sous-espaces vectoriels F_i sont supplémentaires s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

i) La somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe.

ii) Et cette somme est égale à E , c'est-à-dire $\bigoplus_{i=1}^n F_i = E$

Remarque 26. On prêtera attention, dans la définition précédente, à l'ordre dans lequel on impose ces deux conditions. Il n'est, en effet, pas question d'employer la notation $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ avant d'avoir montré ou supposé que la somme était directe.

Proposition 27. *Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit (F_1, \dots, F_n) une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Alors :*

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x = x_1 + \dots + x_n. \quad (8)$$