# Colles semaine 20

## En bref

- Algèbre linéaire : Notion d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels.
- Combinaison linéaire : familles libres, génératrice, base.
- Sous-espace vectoriels engendrés par une famille finie. Notation $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
- Somme de sous-espaces vectoriels. Notion de somme directe.
- Applications linéaires : définitions, noyau et images, lien avec l'injectivité.
- La somme, composée d'application linéaire est encore linéaire. La bijection réciproque d'un isomorphisme est encore un isomorphisme.
- Arithmétique élémentaire. Division euclidienne, calcul de PGCD, décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

## Exemples non exhaustifs de questions de cours

*Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.*

- Trouver une base du sous-espace vectoriel $\{P \in \mathbb{C}_3[X] \mid P(\mathrm{i}) = 0\}$.
- Rappeler la définition de somme directe. Montrer que $F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.
- Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $E$ (Variante possible avec $\mathrm{Im}(f)$).
- Montrer qu'une application linéaire $f$ définie sur $E$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Montrer que la bijection réciproque d'un isomorphisme est encore un isomorphisme.
- Citer et démontrer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

## Note aux colleurs

- Étant donné la comparaison entre les résultats d'interros de cours et l'importance de l'algèbre linéaire au concours, ce thème est présent une troisième semaine de suite. On s'assurera en particulier que les étudiants savent trouver une base d'un sous-espace vectoriel défini par un système d'équations cartésiennes. Et réciproquement, qu'ils savent déterminer une présentation cartésienne d'un espace défini sous forme de Vect.
- Si l'on a besoin de meubler en fin de colle, on pourra poser un exercice d'arithmétique.

# En détail

# Algèbre linéaire

## 1 La structure d'espace vectoriel

### 1.1 Définition des espaces vectoriels

**Définition 1** (Espace vectoriel)**.** On appelle espace vectoriel sur $K$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel la donnée d'un triplet $(E,+,\cdot)$ où $E$ est un ensemble non vide muni d'une addition $\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ et d'une multiplication externe $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda\cdot x \end{array}$ vérifiant les huit axiomes suivants :

i) $\forall(x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$. (L'addition est associative)

ii) $\forall(x,y)\in E^2,\ (x+y)=y+x$. (L'addition est commutative)

iii) $\exists e\in E,\ \forall x\in E,\ e+x=x+e=x$. (Il existe un élément neutre pour l'addition)

iv) $\forall x\in E,\ \exists x'\in E,\ x+x'=x'+x=e$. (Chaque élément admet un opposé)

v) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$. (La multiplication externe est associative)

vi) $\forall x\in E,\ 1\cdot x=x$. (Le scalaire 1 est neutre pour la multiplication externe).

vii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$. (Distributivité de la multiplication externe sur l'addition des scalaires)

viii) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(x,y)\in E^2,\ \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$. (Distributivité de la multi plication externe sur l'addition des vecteurs.)

### 1.2 Règles de calculs

**Proposition-Définition 2.** *Tout espace vectoriel admet par définition un élément neutre pour l'addition. C'est-à-dire un élément $e\in E$ vérifiant $\forall x\in E,\ x+e=e+x=x$. Cet élément est unique et s'appelle le vecteur nul de $E$. On le note très souvent $0_E$.*

**Proposition-Définition 3.** *Tout vecteur $x$ d'un espace vectoriel $E$ admet par définition un opposé, c'est-à-dire un élément $x'$ vérifiant $x'+x=x+x'=0_E$. Cet élément est unique et se note normalement $-x$.*

**Proposition 4** (Règles de calculs dans un espace vectoriel.)**.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soit $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ ; alors,*

$$\lambda\cdot x=0_E \iff (\lambda=0 \text{ ou } x=0_E)\,.$$

*Où $0_E$ est l'élément neutre pour l'addition du groupe $(E,+)$.*

*Par ailleurs :*

$$(-\lambda\cdot x)=\lambda\cdot(-x)=-(\lambda\cdot x).$$

*Où le signe "moins" fait référence à l'opposé dans le corps $\mathbb{K}$ pour le premier terme et à l'opposé dans l'espace vectoriel $E$ pour les deux termes suivants.*

### 1.3 Sous-espaces vectoriels

**Définition 5.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ une partie de $E$. On dit que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ s'il vérifie les trois conditions suivantes :

i) $0_E\in F$, où $0_E$ est l'élément neutre pour l'addition de l'espace vectoriel $E$ ;

ii) $\forall(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$,

iii) $\forall x\in F\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda x\in F$, où l'on note dorénavant $\lambda x$ le résultat de la multiplication externe.

On traduit cela en disant que $F$ est stable par addition et par multiplication externe.

**Proposition 6.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ une partie de $E$. Alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

*i)* *$F$ est non vide,*

*ii)* $\forall\lambda \in \mathbb{K}\ \forall(x, y) \in F^2,\ \lambda x + y \in F$.

**Lemme 7.** *Un bon étudiant de PTSI sait déterminer en moins d'une minute si chacune des parties suivantes est ou non un sous-espace vectoriel.*

*i)* $\big\{(x, y, z) \in C^3 \mid x + 2y + \ iz = 0\big\}$ *dans* $\mathbb{C}$.

*ii) L'ensemble des complexes imaginaires purs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ ?*

*iii) L'ensemble des complexes imaginaires purs dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ ?*

*iv)* $\{z \in \mathbb{C}| \mid |z| \leqslant 1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *?*

*v) L'ensemble des matrices symétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?*

*vi) L'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

*vii) L'ensemble des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ?*

*viii) L'ensemble des fonctions bornées dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ?*

*ix) Soit $M \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des fonctions bornées par $M$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ?*

*x) L'ensemble des fonctions paires dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ?*

*xi) L'ensemble des fonctions croissantes dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ?*

*xii) L'ensemble des fonctions monotones dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ?*

*xiii) L'ensemble des suites convergentes dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ?*

*xiv) L'ensemble des suites convergentes vers 0 dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ?*

*xv) L'ensemble des suites convergentes vers 1 dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ?*

**Proposition 8.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de $E$.*

## 2 Combinaisons linéaires

### 2.1 Familles libres

**Définition 9** (Famille libre)**.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est **libre** si elle vérifie l'implication suivante :

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \lambda_i = 0\right). \tag{1}$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle de la famille est celle à coefficients tous nuls.

Notons que l'implication réciproque est vérifiée par toute les familles.

On appelle famille **liée** toute famille qui n'est pas libre.

**Lemme 10** (Principe d'identification des coefficients d'une combinaison linéaire de famille libre)**.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille **libre** de vecteurs de $E$. Alors, pour toutes familles de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ :*

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \iff \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \lambda_i = \mu_i\right). \tag{2}$$

**Proposition 11.** *Voici une liste de propositions élémentaires à propos des familles libres :*

*i) Une famille contenant le vecteur nul est liée.*

*ii) Une famille à un élément est libre si et seulement si l'unique élément de la famille est non nul.*

*iii) Tous les éléments d'une famille libre sont distinct deux à deux.*

*iv) Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.*

*v) Toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.*

**Proposition 12.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de $E$. Alors, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $x_i$ est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.*

### 2.2 Familles génératrices

**Définition 13** (Famille génératrice)**.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice de $E$ si tout vecteur $y$ de $E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$. Autrement dit si :

$$\forall y \in E,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

### 2.3 Bases

**Définition 14.** Une famille qui est à la fois une famille libre et une famille génératrice de $E$ est appelée une base de $E$.

**Proposition-Définition 15.** *Beaucoup d'espaces vectoriels usuels sont muni de bases « naturelles » dite canonique.*

- *Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_1, \ldots e_n)$ où $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $e_i = \begin{pmatrix}0, & \cdots, & 0, & \underset{i\text{-ème coef}}{1}, & 0, \cdots & 0\end{pmatrix}$ est une base appelé base conique de $\mathbb{K}^n$.*
- *Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ définie ci-dessous est une base appelé base canonique de $\mathcal{M}_n(\imath)K$.*

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \forall j \in [\![1\,;p]\!],\ E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & & j & & \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

- *Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*

### 2.4 Sous-espaces vectoriels engendrées par une famille

**Définition 16.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel engendré par une famille[1] $\mathcal{F}$ de $E$ et on note $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille. Autrement dit : si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille finie, alors :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ :\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}. \tag{3}$$

**Lemme 17** (le sous-espace engendré par une famille est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille)**.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteur de $E$. Alors tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ qui contient la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ contient encore* $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

*Remarque* 18. Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un espace vectoriel E est génératrice de $E$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = E$.

## 3 Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition 19** (Somme de deux sous-espace vectoriel)**.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On appelle somme de $F$ et $G$ et on note $F + G$ le sous-espace vectoriel :

$$F + G = \{x_F + x_G \ :\ x_F \in F,\, x_G \in G\}. \tag{4}$$

Le lecteur vérifiera que cela définit bien un sous-espace vectoriel.

---

[1] le programme officiel se limite au cas où la famille contient un nombre fini de vecteurs

**Définition 20.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également, $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$. On définit la somme des sous-espaces vectoriels comme le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n \right\}. \tag{5}$$

Le lecteur se convaincra que cette définition coïncide avec la précédente lorsque $n = 2$.

*Remarque* 21 (La somme de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant chacun des sous-espaces vectoriels). Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également, $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$. Alors, pour tout sous-espace vectoriel $G$ de $E$ on a l'implication suivante :

$$(\forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ F_i \subset G) \implies \sum_{i=1}^{n} F_i \subset G \tag{6}$$

**Définition 22** (Somme directe)**.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est directe et on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ si l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\forall (x_1, \ldots x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ \left( \sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\, x_i = 0_E \right). \tag{7}$$

Notons que l'implication réciproque « $\Leftarrow$ » est toujours vérifiée.

**Proposition 23.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors, la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.*

**Attention :** Cela ne se généralise malheureusement pas à plus de deux sous-espaces vectoriels. Le lecteur étudiera attentivement l'exemple dans $\mathbb{K}^2$ des sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}((1,0))$ , $G = \mathrm{Vect}((0,1))$ et $H = \mathrm{Vect}((1,1))$ pour s'en convaincre.

**Proposition 24.** *Dans une somme directe, on a unicité de la décomposition d'un vecteur comme une somme d'élément de chaque sous-espace vectoriel. Plus précisément, si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n$ est un entier naturel non nul, $(F_1, \ldots, F_n)$ est une famille de sous-espaces vectoriels de $E$ en somme directe et si $x \in F_1 + \cdots + F_n$ ; alors $\exists! (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x = x_1 + \cdots + x_n$.*

**Définition 25.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que les sous-espaces vectoriels $F_i$ sont supplémentaires s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

i) La somme $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est directe.

ii) Et cette somme est égale à $E$, c'est-à-dire $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i = E$

*Remarque* 26. On prêtera attention, dans la définition précédente, à l'ordre dans lequel on impose ces deux conditions. Il n'est, en effet, pas question d'employer la notation $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$ avant d'avoir montré ou supposé que la somme était directe.

**Proposition 27.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. Alors :*

$$\forall x \in E,\ \exists!\, (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x = x_1 + \cdots + x_n. \tag{8}$$

# 4 Les applications linéaires

## 4.1 Terminologie

**Définition 28.** Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est une *application linéaire* ou encore un *morphisme d'espaces vectoriels* si elle vérifie les deux axiomes suivants :

i) $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Certains cas particuliers donnent lieu à un vocabulaire spécifique ; en reprenant les notations précédentes :

- Si $F = E$, on dit que $f$ est un *endomorphisme.*
- Si $f$ est bijective, on dit que c'est un *isomorphisme.*
- Si $f$ est un endomorphisme bijectif, on dit que c'est un *automorphisme.*
- Si $F = \mathbb{K}$, on dit que $f$ est une *forme linéaire.*

**Définition 29.** Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. On dit qu'il sont *isomorphes* s'il existe un isomoprhisme d'espaces vectoriels entre $E$ et $F$.

## 4.2 Propriétés des applications linéaires

### 4.2.1 Généralités

Commençons par un lemme assez trivial :

**Lemme 30.** *Si $f : E \to F$ est un morphisme d'espaces vectoriels, alors $f(0_E) = 0_F$.*

Ceci permet de combiner les deux axiomes des applications linéaires en un seul, ce qui allège la rédaction pour prouver qu'une application est linéaire.

**Proposition 31.** *Soit $f : E \to F$ une application entre espaces vectoriels. L'application $f$ est linéaire si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

**Proposition 32** (Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels)**.** *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels ; alors :*

*i) Pour tout sous-espace vectoriel $A$ de $E$, son image directe $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.*

*ii) Pour tout sous-espace vectoriel $B$ de $F$, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de $E$*

### 4.2.2 Noyaux et images

La proposition **??** possède deux cas particuliers d'applications très importants :

**Proposition-Définition 33.** *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espace vectoriel. Alors l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de $E$ que l'on appelle noyau de $f$ et que l'on note* $\ker(f)$.

**Proposition 34.** *Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$.

**Proposition-Définition 35.** *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors l'ensemble $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de $F$ que l'on appelle image de $f$ et que l'on note* $\mathrm{Im}(f)$.

**Proposition 36.** *Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

### 4.3 Quelques résultats de structure

**Notation 37.** Si $E$ et $F$ sont deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des morphismes d'espaces vectoriels de $E$ vers $F$. Lorsque $E = F$, on note simplement $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$. Enfin, on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de $E$ (c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes bijectifs.)

**Lemme 38.** *Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de $E$ dans $F$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $F^E$ des applications de $E$ dans $F$.*

**Attention !** L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

**Proposition 39** (La composée d'applications linéaire est encore linéaire)**.** *Soit $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels ainsi que $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si $f$ et $g$ sont linéaires, alors l'application $g \circ f$ est linéaire.*

**Lemme 40** (Distributivité de la composition sur l'addition)**.** *Soit $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels.*

- *Si $f : E \to F$ ainsi que $g_1 : F \to G$ et $g_2 : F \to G$ sont linéaires alors, $(g_1+g_2)\circ f = g_1\circ f+g_2\circ f$. (Ceci est vrai pour toutes applications, par définition)*
- *Si $f_1 : E \to F$ et $f_2 : E \to F$ ainsi que $g : F \to G$ sont linéaires alors, $g\circ(f_1+f_2) = g\circ f_1+g\circ f_2$. (Ceci est en général faux si l'application $g$ n'est pas linéaire)*

**Proposition 41.** *Soit $f : E \to F$ un isomorphisme (donc une application bijective) d'espaces vectoriels. Alors la réciproque $f^{-1}$ est encore un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

**Définition 42.** Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. On dit que $E$ est *isomorphe* à $F$ s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $E$ et $F$.

*Remarque* 43. Le résultat sur la réciproque des isomorphismes permet d'affirmer que $E$ est isomorphe à $F$ si et seulement si $F$ est isomorphe à $E$.