Colles semaine 21

En bref

- Limites des fonctions. Limites finies ou infinies, en un point fini ou en l'infini.
- Généralisations des propriétés de limites de suite aux limites de fonctions.
- Continuité des fonctions : définitions et propriété de stabilité.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Image directe d'un segment, d'un intervalle par une fonction continue. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- Dérivabilité : définition par limite de taux d'accroissement ou (et c'est équivalent) par existence d'un développement limité d'ordre 1.
- Dérivabilité des fonctions : définitions et propriétés de stabilité.
- Notion d'extremum local. Si une fonction dérivable admet un extremum local en un point c **intérieur**, alors $f'(c) = 0$.
- Propriété globales des fonctions dérivables sur un intervalle : Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis. Application pour montrer le théorème fondamental de l'analyse.
- Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (aussi appelé théorème de limite de la dérivée).
- Brève extension aux dérivées itérés. Notation $\mathcal{C}^n$. Formule de Leibniz.
- Brève extension des propriétés de continuité et dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes (mais toujours définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.)

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer que si f est continue en a et si $u_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$.
- Montrer que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $x \to 0$.
- Montrer que f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1.
- Citer et montrer le théorème de Rolle.
- Citer sans démonstration l'inégalité des accroissements finis. L'appliquer pour montrer la convergence de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{e}}{2}e^{-u_n} \end{cases}$
- Montrer le théorème de dérivabilité des bijections réciproques.

Note aux colleurs

—

En détails

1 Limites des fonctions

1.1 Définitions

1.1.1 Cas des limites finies en un point

Définition 1 (Limite finie en un point)**.** Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit également x_0 un réel de I ou une extrémité de I, si I est un intervalle ouvert. Par exemple, si $I =]0\,;1[$, on s'autorisera à considérer $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

Si ℓ est un réel, on dit que f admet pour limite ℓ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\ ,\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$.

Remarque 2. Notons que f peut admettre une limite en x_0 sans être définie en x_0.

Remarque 3. On peut également définir des limites à droite et à gauche en x_0. Par exemple, en reprenant les notations de la définition **??**, on dit que f admet ℓ pour limite à droite en x_0 (On suppose alors que x_0 n'est pas la borne supérieure de I.) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I \cap [x_0\,; x_0 + \alpha[\ ,\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \geqslant x_0}} f(x) = \ell$.

Le lecteur généralisera comme un grand les définitions de limites à gauche ou encore les définitions de limites à gauche strictes telles $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

1.1.2 Cas des limites infinies en un point

Définition 4. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit également x_0 un réel de I ou une extrémité de I.

i) On dit que f admet pour limite $+\infty$ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\ ,\quad f(x) \geqslant M.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$.

ii) On dit que f admet pour limite $-\infty$ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\ ,\quad f(x) \leqslant m.$$

Remarque 5. Bien sûr, toutes ces définitions, s'adaptent dans le cas des limites à gauche ou à droite, ou à gauche strictement, etc.

1.1.3 Cas des limites finies en l'infini

Définition 6 (Limite finie en $x \to +\infty$)**.** Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On supposera que I est un intervalle non majorée (c'est-à-dire qu'il est de type $[\alpha\,; +\infty[$ ou $]\alpha\,; +\infty[$ pour un certain réel α).

Si ℓ est un réel, on dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]a\,; +\infty[\ ,\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$.

Exercice 7. Écrire la définition correspondante pour les limites en $x \to -\infty$.

1.1.4 Cas des limites infinies en l'infini

Définition 8 (Limite infinie en $x \to -\infty$)**.** Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On supposera que I est un intervalle non minorée (c'est-à-dire qu'il est de type $]-\infty\,; \alpha]$ ou $]-\infty\,; \alpha[$ pour un certain réel α).

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $x \to -\infty$ si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty\,; a[\ ,\quad f(x) \geqslant M.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$.

Exercice 9. Adapter la définition précédente pour :
— La limite $+\infty$ en $x \to +\infty$.
— La limite $-\infty$ en $x \to +\infty$.
— La limite $-\infty$ pour $x \to -\infty$.

1.1.5 Bilan

Exercice 10. Compter le nombre de définitions différentes de limites ainsi énoncées (explicites ou implicites).

1.2 Propriétés des limites

Théorème 11 (Unicité de la limite)**.** *Soit x_0 un réel appartenant à I ou une extrémité de I (qui englobe le cas où $x_0 = \pm\infty$). Alors, la limite éventuelle (finie ou infinie) de f en x_0 est unique.*

1.2.1 Opérations algébriques

Proposition 12. *Si f et g sont deux fonctions définies sur I qui admettent chacune une limite finie en x_0 (un point de I ou une extrémité), notées respectivement ℓ_f et ℓ_g. Alors :*

i) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow{x \to x_0} \alpha \ell_f + \beta \ell_g$.

ii) $(f(x)g(x)) \xrightarrow{x \to x_0} \ell_f \ell_g$.

iii) Si $\ell_f \neq 0$, alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $I \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[$ et on a $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) \xrightarrow{x \to x_0} \frac{\ell_g}{\ell_f}$.

Remarque 13. Si les limites ℓ_f et ℓ_g peuvent être infinies, alors le théorème s'applique encore à condition de généraliser les règles vues sur les limites de suites. En particulier, certaines formes restent indéterminées.

1.2.2 Limites et ordre

Proposition 14. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de $I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité. On suppose que f admet une limite (finie ou infinie) ℓ en x_0 et que $\ell > a$. Alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel, f est strictement supérieure à a. Autrement dit :*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\,,\ f(x) > a.$$

Remarque 15. Comme pour les suites, il est crucial que l'inégalité $\ell > a$ soit stricte.

Proposition 16 (Passage à la limite des inégalités)**.** *Soit f et g deux fonctions définies sur I et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité. On suppose que f et g admettent chacune une limite (finie ou infinie) en x_0, notée respectivement ℓ_f et ℓ_g. On suppose de plus que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$. Alors $\ell_f \leqslant \ell_g$.*

1.2.3 Composition de limites

Théorème 17 (Théorème de composition de limite (version fonctionnelle)). *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On se donne deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$, de sorte que la composée $g \circ f$ est bien définie. On se donne également un point x_0 appartenant à I ou qui est une extrémité de I. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$. On suppose également que ℓ appartient à J ou est une extrémité de J et que $g(y) \xrightarrow{y \to \ell} L$.*

Alors la fonction $g \circ f$ admet une limite en x_0 et $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \to x_0} L$.

Remarque 18. Les valeurs de x_0, ℓ et L de ce théorème peuvent être infinies.

Remarque 19. Ce théorème est souvent utilisé dans le cas où $\ell \in J$ et que g est continue en ℓ. Dans ce cadre, on a $L = g(\ell)$.

Théorème 20 (Composition de fonction et de suites). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit également u une suite convergeant vers une limite ℓ. On suppose que ℓ appartient à I ou est une extrémité de I. On suppose enfin que f admet pour limite L en $x \to \ell$. Alors la suite $n \mapsto f(u_n)$ converge vers L.*

Remarque 21. Les valeurs de ℓ et L de ce théorème peuvent être infinies.

Remarque 22. Ce théorème est souvent utilisé dans le cas où $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ. Dans ce cadre, on a $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = f(\ell)$.

1.2.4 Prouver l'existence de limites

Théorème 23 (Théorème de limite monotone). *Soit f une fonction croissante sur I et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité.*

i) La fonction f admet une limite à gauche stricte en x_0 (qui peut être finie ou $+\infty$ si x_0 est la borne supérieure de I).

ii) La fonction f admet une limite à droite stricte en x_0 (qui peut être finie ou $-\infty$ si x_0 est la borne inférieure de I.

iii) Si de plus x_0 est un point intérieur à I, alors

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

1.3 Résultats de croissance comparées sur les limites de fonctions

1.3.1 Limites en l'infini

Proposition 24 (Croissances comparées en $+\infty$). *Les limites suivantes sont à connaître. On peut invoquer ces résultats sur une copie sans justification en précisant « par résultat de croissances comparées classiques, on a ... »*

i) Si $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ est un polynôme non constant ($n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$), alors $P(x) \xrightarrow{x \to +\infty} \pm\infty$. (Le signe étant celui du coefficient dominant a_n.)

ii) $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$ et plus généralement, pour tous réels $a > 1$ et $\alpha > 0$: $\frac{a^x}{x^\alpha} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$.

iii) $x e^{-x} \xrightarrow{x \to \infty} 0$ et plus généralement, pour tous réels $a \in \left]-1\,;1\right[$ et $\alpha > 0$: $a^x x^\alpha \xrightarrow{x \to +\infty} 0$.

iv) $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$ et plus généralement, pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $\frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$.

Proposition 25 (Adaptation en $-\infty$). *Les limites suivantes sont à connaître. On peut invoquer ces résultats sur une copie sans justification en précisant « par résultat de croissances comparées classiques, on a ... »*

i) Si $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ est un polynôme non constant ($n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$), alors $P(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \pm\infty$. Le signe étant déterminé de la manière suivante :

- *Si $a_n > 0$ et si n est pair, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$.
- *Si $a_n > 0$ et si n est impair, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.
- *Si $a_n < 0$ et si n est pair, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.
- *Si $a_n < 0$ et si n est impair, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$.

ii) $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$ *et plus généralement, pour tout réel $a \in]0\,;1[$ et pour tout entier naturel n :* $\frac{a^x}{x^n} \xrightarrow{x\to-\infty} \pm\infty$ *; le signe dépendant de la parité de n.*

iii) $x\mathrm{e}^x \xrightarrow{x\to-\infty} 0$ *et plus généralement, pour tout réel $a > 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:* $a^x x^n \xrightarrow{x\to-\infty} 0$.

1.3.2 Limites en zéro

Proposition 26 (Croissances comparées en 0^+)**.** *Les limites suivantes sont à connaître. On peut invoquer ces résultats sur une copie sans justification en précisant « par résultat de croissances comparées classiques, on a ... »*

i) $x\ln(x) \xrightarrow{x\to0^+} 0$

ii) Plus généralement, pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $x^\alpha|\ln x|^\beta \xrightarrow{x\to0^+} 0$.

2 Rappels sur les fonctions continues

2.1 Définitions

Définition 27 (Continuité en un point)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si elle admet une limite en x_0 et que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Lemme 28 (L'ensemble des fonctions continues est stable par combinaison linéaire.)**.** *L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Cet espace vectoriel se note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.*

Proposition 29. *Le produit de fonctions continues, le quotient de fonctions continues (si le dénominateur ne s'annule pas), la composition de fonctions continue sont encore des fonctions continues.*

Proposition 30. *Si f et g sont deux fonctions continues $I \to \mathbb{R}$, alors*
- *La fonction $|f|$ est encore continue sur I.*
- *La fonction $\max(f,g)$ est encore continue sur I.*

2.3 Propriétés globales des fonctions continues

Théorème 31 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I avec $a < b$. (On supposera également $f(a) < f(b)$ par simple commodité d'écriture). Si y est un réel vérifiant $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, alors il admet un antécédent par f.*

Corollaire 32 (Image d'un intervalle)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors l'image directe $f(I)$ est un intervalle.*

Remarque 33. La preuve de ce dernier corollaire nécessite d'admettre ou de prouver qu'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (a \leqslant x \leqslant b) \implies x \in I.$$

Théorème 34 (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé)**.** *Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I avec $a < b$ (comprenant éventuellement le cas $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). On suppose que f admet une limite en a et en b que l'on notent respectivement ℓ_a et ℓ_b.*

On supposera également $\ell_a < \ell_b$ par simple commodité d'écriture). Si y est un réel vérifiant $\ell_a < y < \ell_b$, alors il admet un antécédent par f.

Théorème 35 (Image d'un segment, Admis)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle **fermé borné** I, alors l'image directe $f(I)$ est un intervalle fermé borné. (on parle aussi de segment pour désigner un intervalle fermé borné).*

Remarque 36. Si I est un intervalle mais pas un segment, alors $f(I)$ est un intervalle qui peut être de nature très différente de I. Le lecteur cherchera des exemples où I est borné mais pas $f(I)$, ou encore des exemples ou I est fermé mais pas $f(I)$, etc.

Corollaire 37. *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, si I est un segment et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ existe ainsi que $\inf\limits_{x\in I} f(x)$. De plus, il existe deux réels a et b appartenant à I tels que $f(a) = \sup\limits_{x\in I} f(x)$ et $f(b) = \inf\limits_{x\in I} f(x)$. Ces bornes supérieure et inférieure sont donc des maximum et minimum.*

Théorème 38 (Théorème de la bijection)**.** *Soit f une fonction continue $I \to \mathbb{R}$. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone. De plus, dans ce cas, elle réalise une bijection de I sur $f(I)$ (qui est encore un intervalle). La bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est alors encore une fonction continue et de même monotonie que f.*

Théorème 39 (Théorème de la bijection, version aux limites)**.** *Soit $]a\,;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $]a\,;b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f admet des limites en a et b que l'on note respectivement ℓ_a et ℓ_b. Si f est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $]a\,;b[$ et J où J est l'intervalle définie par :*

- *$J =]\ell_a\,;\ell_b[$ si f est strictement croissante.*
- *$J =]\ell_b\,;\ell_a[$ si f est strictement décroissante.*

De plus, la réciproque de f est encore une bijection entre J et $]a\,;b[$ qui a même sens de variation que f et qui est également continue.
Ce théorème reste valables si les bornes a et b ou les limites ℓ_a et ℓ_b sont infinies.

2.4 Extension de la continuité aux fonctions complexes

Nous étendons brièvement les résultats précédents aux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Attention ! Il n'est pas question ici d'étendre ces résultats sur les fonctions de la variable complexe définie sur $\mathbb{C}$. La définition de continuité ou de limite dans ce cadre est quand même plus délicate. Je renvoie au cours de deuxième année pour des détails sur ce fait.

Définition 40 (Limite de fonctions à valeurs complexe)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$ et x_0 un réel de I ou une extrémité (éventuellement $x_0 = \inf(I)$ ou $x_0 = \sup(I)$). Soit également z un complexe.

- Pour x_0 un réel fini ; on dit que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = z$ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \delta\,; x_0 + \delta]\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

- Pour $x_0 = +\infty$; on dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = z$ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [a\,; +\infty[\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

- Pour $x_0 = -\infty$; on dit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = z$ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-infty\,; a]\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Théorème 41 (Théorème des gendarmes , version complexe)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$ et x_0 un réel de I ou une extrémité (éventuellement $x_0 = \inf(I)$ ou $x_0 = \sup(I)$). Soit enfin z un complexe.*

S'il existe une fonction réelle positive g vérifiant : $\begin{cases} \forall x \in I,\ |f(x) - z| \leqslant z \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ *; alors la fonction f admet pour limite z en x_0.*

Application 42. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 43. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x_0 \in I$, on dit que f est continue en x_0 si elle y admet une limite et si $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I

Lemme 44. *Pour deux fonctions f et g complexe continue sur un intervalle I, la somme $f+g$, le produit fg ou encore les combinaisons linéaires $\alpha f + \beta g$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ sont continues sur I.*

Proposition 45. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. La fonction f est continue sur I si et seulement si chacune des fonctions réelles* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *est continue sur I.*

Lemme 46. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Si la fonction f est continue sur I, alors la fonction réelle $|f|$ est continue sur I.*

La réciproque est fausse en général.

Théorème 47 (Les fonctions continues sur un segment sont bornées)**.** *Soit a, b deux réels vérifiant $a < b$ et une fonction f continue sur le segment $[a\,;b]$ à valeurs complexe. Alors la fonction f est bornée et atteint sa borne sur le segment $[a\,;b]$. Autrement dit :*

$$\exists c \in [a\,;b]\,,\ \forall t \in [a\,;b]\, |f(t)|\, |f(c)|\,. \tag{4}$$

Proposition 48. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Alors :*
- *La fonction* $\exp(f)$ *est continue sur I,*
- *si la fonction f ne s'annule pas, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur I.*

3 Dérivation

3.1 Dérivabilité en un point

Définition 49. Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que ***f*est dérivable en *a*** si l'application

$$\tau_a \ : \ \begin{array}{ccc} I - \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite s'appelle **le nombre dérivé de *f* en *a*** et se note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque 50. Quelques remarques sur cette définition :
- Pour tout $x \in I - \{a\}$, le réel $\tau_a(x)$ s'appelle le **taux d'accroissement** de la fonction f entre x et a. Que représente-t-il graphiquement ?
- Si f est dérivable en a, on a donc, quitte à changer de variable.
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- Le caractère dérivable d'une fonction en a est une propriété locale : si f et g sont deux fonctions qui coïncident au voisinage de a, f est dérivable en a si et seulement si g l'est. Dans ce cas, $f'(a) = g'(a)$.

Proposition 51 (Développement limité d'ordre 1)**.** *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
Alors, f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel α permettant d'écrire le développement limité suivants (ils sont équivalents) :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \alpha(x-a) + o(x-a).$$

Dans ce cas, le nombre α vérifiant la formule est unique et vaut $\alpha = f'(a)$.

Remarque 52. Commentons cette proposition :

- Par le même changement de variable que précédemment, ce développement limité est équivalent au suivant :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \alpha h + o(h). \tag{5}$$

- L'expression $y = f(x) + f'(a)(x-a)$ est l'équation d'une droite que l'on appelle tangente à la courbe de f en a. C'est en un sens la "meilleure" approximation affine de f au voisinage de a.
- On se posera prochainement la question de l'approximation locale de f par un polynôme de degré supérieur, ceci conduira à la notion de développement limité d'ordre supérieur.

Définition 53 (Dérivabilité à gauche et à droite)**.** Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que **f est dérivable à droite en a** lorsque $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite de a. On note alors $f'_{\mathrm{d}}(a)$ cette limite et on l'appelle **la dérivée à droite de f en a**.
- On dit que **f est dérivable à gauche en a** lorsque $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche de a. On note alors $f'_{\mathrm{g}}(a)$ cette limite et on l'appelle **la dérivée à gauche de f en a**.

Proposition 54. *Soient a un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors, f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et que $f'_{\mathrm{g}}(a) = f'_{\mathrm{d}}(a)$.*

3.2 Fonction dérivée

Définition 55 (Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction $f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ s'appelle **la fonction dérivée de f** .

Remarque 56. Si f est définie sur une réunion d'intervalles, on dit que f est dérivable si sa restriction à chaque intervalle de la réunion est dérivable.

Proposition 57 (Dérivable implique continue)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors, f est continue en a.*

Remarque 58. Attention la réciproque est fausse. Exemple de $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

3.3 Opérations sur les fonctions dérivables

3.3.1 Opérations algébriques

Proposition 59 (Opérations algébriques)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en un point a de I.*

i) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

ii) Le produit fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

iii) Si g ne s'annule pas en a, l'inverse $\frac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a, est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

iv) Si g ne s'annule pas en a, le quotient $\frac{f}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

3.3.2 Composition

Proposition 60 (Dérivée d'une composition). *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

Remarque 61. La proposition précédente ne donne qu'une condition suffisante pour la dérivabilité de $g \circ f$. Si f n'est pas dérivable en a ou g n'est pas dérivable en $f(a)$, on ne peut rien conclure. Il faut alors revenir à la définition. On pourra, à titre d'exemple, étudier l'exercice **??**.

Exercice 62 (Dérivabilité des compositions). Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$. Puis la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \sqrt{e^x - x - 1}$.

3.3.3 Dérivation des bijections réciproques

Proposition 63 (Dérivée de la fonction réciproque en un point). *Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et continue, $b \in J$ et $a = f^{-1}(b)$. On suppose que f dérivable en a et que f^{-1} est continue en $f(a)$. Alors, f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et, dans ce cas,*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si la fonction est continue sur un *intervalle* I, on sait en fait déjà que la fonction réciproque est continue. Ainsi :

Corollaire 64. *Si f est un bijection dérivable d'un intervalle I sur un intervalle J. Alors, f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.*

4 Propriété globale des fonctions dérivables

4.1 Une propriété cruciale : l'inégalité des accroissements finis

Lemme 65 (Extremum local). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et x_0 un* ***point intérieur*** *à I (C'est-à-dire que $x_0 \neq \inf(I)$ et $x_0 \neq \sup(I)$). Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Également, le fait que x_0 soit un point intérieur à I est crucial. Par exemple, la fonction $\begin{array}{ccc} [0\,;\,1] & \to & [0\,;\,1] \\ x & \mapsto & x \end{array}$ admet un maximum local en 1, mais sa dérivée ne s'y annule pas.

Attention ! Bien sûr, ceci ne fournit qu'une condition suffisante pour l'existence d'un extremum local. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'a pas d'extremum en 0.

Théorème 66 (Théorème de Rolle). *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a\,;\,b] \to \mathbb{R}$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in [a\,;\,b]$ vérifiant $f'(c) = 0$.*

Application 67. Si un polynôme réel P de degré n admet n racines réelles , alors son polynôme dérivé P' admet $n-1$ racines réelles.

Théorème 68 (Égalité des accroissements finis). *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il existe alors un réel $c \in \,]a\,;\,b[$ vérifiant $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Corollaire 69 (Inégalité des accroissements finis). *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a\,;\,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que la fonction dérivé f' vérifie $\forall x \in [a\,;\,b]\,,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors, on peut écrire*

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Théorème 70 (Inégalité des accroissements finis, version alternative)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. S'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que*

$$\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leqslant M$$

alors,

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|.$$

Le lecteur est invité à comprendre que cette inégalité des accroissements finis ne dit pas autre chose que la trivialité suivante « Si un cycliste possède une vitesse instantanée qui ne dépasse jamais $40\,\text{km.h}^{-1}$ au cours de son trajet, alors sa vitesse moyenne est inférieure ou égale à $40\,\text{km.h}^{-1}$ »

4.2 Le(s) théorème(s) fondamental(aux) de l'analyse

Théorème 71 (Lien entre sens de variations et signe de la dérivée)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- *f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.*

Corollaire 72. *Une fonction dérivable sur I est constante si et seulement si sa fonction dérivée est la fonction nulle.*

Proposition 73. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Cette fonction est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ et s'il n'existe aucun intervalle de longueur strictement positive sur lequel f' est constante nulle.*

Le lecteur adaptera tout seul cette proposition pour les fonctions strictement décroissante.

Proposition 74 (Unicité des primitives à une constante près)**.** *Si f et g sont deux fonction dérivables sur un intervalle I et que $f' = g'$, alors il existe une constante C vérifiant $\forall x \in I,\ f(x) = g(x) + C$.*

Théorème 75 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, il existe une unique primitive de f qui s'annule en a. De plus, cette fonction est définie de la manière suivante :*

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 76. Nous ne pouvons pour l'instant montrer que l'unicité de cette primitive. Pour montrer son existence, il faut définir l'intégrale indépendamment de la notion de primitive. Ceci se fait en construisant l'intégrale comme la valeur de « l'aire sous la courbe ». Une telle définition n'est toutefois pas si aisée et fera l'objet d'un chapitre ultérieur. Notons que l'on pourrait également admettre l'existence de primitive et utiliser ce théorème pour définir l'intégrale.

4.3 Application : retour sur les suites récurrentes

L'inégalité des accroissements finis a des conséquences importantes sur l'étude des suites récurrentes.

Nous appellerons dans cette section *suite récurrente associée à une fonction f* toute suite u vérifiant la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Commençons d'abord par étudier un exemple

Exemple 77. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$. Soit également u une suite récurrente associée à f et vérifiant $u_0 > -1$.

- On remarque que l'intervalle $]-1\,; +\infty[$ est stable par f.
- On étudie les points fixe de f sur cet intervalle. On voit qu'il en existe un unique que l'on note α. On va donc se demander si la suite u converge vers α.
- On a l'idée de poser $\varepsilon_n = |u_n - \alpha|$. On va alors étudier la suite ε à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

On laisse le soin au lecteur de poursuivre l'étude. Celui ci se demandera à la fin si ce travail peut d'adapter dans le cas où $u_0 < -1$.

Exemple 78. On considère la fonction $f : x \mapsto 4x-x^2$ et u, une suite récurrente associé à la fonction f. On suppose également que $u_0 \in]0\,;4[$.

— Montrer que l'intervalle $[0\,;4]$ est stable par f. Quid de l'intervalle ouvert $]0\,;4[$?
— Montrer que f admet exactement deux points fixes sur $[0\,;4]$.
— Montrer que la suite u diverge ou[1] est stationnaire.

Méthode 79 (Ce qu'un élève de PTSI doit retenir)**.** Lors de l'étude d'une suite récurrente, lorsque l'on a trouvé un point fixe α, il est une bonne idée de calculer au brouillon la dérivée $f'(\alpha)$. Il est difficile de prouver les arguments suivants de manière formelle mais cela doit guider notre recherche.

— Si $|f'(\alpha)| < 1$, alors il est *possible* que la suite u converge vers α. Pour le montrer rigoureusement, il faut commencer par se restreindre à un intervalle où f' est bornée par une constante $k < 1$. Puis s'assurer que la suite atteint cet intervalle. Ensuite, on applique l'inégalité des accroissements finis pour majorer $|u_{n+1} - \alpha|$ par récurrence. On se laisse évidemment guider par l'énoncé avant d'appliquer toute cette artillerie.
— Si $|f'(\alpha)| > 1$, alors il est *très improbable* que la suite u converge vers α. Plus précisément, elle ne converge que si une de ses valeurs vaut exactement α.
— Si $|f'(\alpha)| = 1$, on ne sait rien dire. Tous les cas sont possibles et probables. On suivra alors l'énoncé pour avoir une intuition de la convergence ou non

4.4 Une autre application : prolongement de fonction $\mathcal{C}^1$.

Théorème 80 (Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ ou théorème de limite de la dérivée)**.** *Soit a, b deux réels avec $a < b$. Soit également f une fonction définie sur $[a\,;b[$ et à valeurs réelles. On suppose que les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :*

i) La fonction f est continue sur le « fermé » $[a\,;b[$.
ii) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]a\,;b[$.
iii) La dérivée f' admet une limite finie en a que l'on note $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f'(x)$.

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b[$ et $f'(a) = \ell$.

Remarque 81. Avec les mêmes hypothèses mais en supposant que la limite $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f'(x)$ est infinie, on conclurait que la fonction f est non dérivable en a et qu'elle y admet une demi-tangente verticale.

Ce théorème est aussi couramment utilisé pour étudier la dérivabilité de composées indéterminées comme l'illustre l'exercice suivant.

4.5 Généralisation de la dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes

Définition 82. Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que **$f$est dérivable en a** si l'application à valeur complexe

$$\tau_a \; : \; \begin{array}{ccc} I - \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet une limite finie complexe. Cette limite est alors le nombre dérivé de f en a, que l'on note $f'(a)$.

On peut se ramener au cas des fonctions réelles en séparant les parties réelles et imaginaires à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 83. *Soient I un intervalle réel, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une application. Alors,*

f est dérivable en a (ou sur I) si, et seulement si, Re(f) et Im(f) le sont.

et dans ce cas,

$$f'(a) = (\mathrm{Re} f)'(a) + i\,(\mathrm{Im} f)'(a).$$

1. On rappelle que stationnaire signifie $\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ u_n = u_p$.

Corollaire 84. *Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est constante si, et seulement si, elle est dérivable avec une dérivée nulle.*

Exemple 85. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Calculer la dérivée de $|f|^2$. Montrer que si $a \in I$ et si $f(a) \neq 0$, alors, la fonction $|f|$ est dérivable en a.

Attention ! Les énoncés des théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux pour les fonctions à valeurs complexes.
Pour s'en convaincre, considérer, par exemple, la fonction $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{ix}$.

Proposition 86 (inégalité des accroissements finis : version complexe)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. S'il existe un* ***réel*** *$M \geqslant 0$ tel que*

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M$$

alors,

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

5 Dérivées itérées

Pourquoi se contenter de dériver une fois, si on peut le faire plusieurs fois de suite ?

5.1 Définitions et notations

Définition 87. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$ sur I** si f est dérivable sur I et si sa fonction dérivée f' est continue sur I.

Exemple 88. i) Les fonctions polynomiales, exponentielles, etc. sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

ii) La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 89 (Dérivées successives)**.** Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit les dérivées successives de f par récurrence. On pose $f^{(0)} = f$. Pour un entier naturel n donné, on suppose la fonction $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ déterminée. Si $f^{(n)}$ est dérivable en a, on pose $f^{(n+1)}(a) = \left(f^{(n)}\right)'(a)$, et si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, on pose $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.
Lorsqu'il existe, le nombre $f^{(n)}(a)$ s'appelle **le nombre dérivé n-ième de $f$en a**. On dit alors que f est n fois dérivable en a.
Lorsqu'elle existe, la fonction $f^{(n)}$ s'appelle **la dérivée n-ième de f**. On dit alors que f est n fois dérivable sur I.
On dit, de plus, que f est de **classe $\mathcal{C}^n$sur I** si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I.
Une fonction est dite de **classe $\mathcal{C}^\infty$sur I** si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier naturel n.

Remarque 90. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{K}$, et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$. On note aussi $f^{(n)}(a) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$ et $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Exercice 91. i) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $g : x \mapsto \frac{1}{x-a}$.

ii) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \cos^3 x$.

5.2 Calculs pratiques de dérivées itérées

Proposition 92. *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

i) Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $(\alpha f + \beta g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et on a même $(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$.

ii) Le produit fg est de classe $\mathcal{C}^n$.

iii) Le quotient $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) est de classe $\mathcal{C}^n$.

iv) La composée $g \circ f$ (si elle a un sens) est de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 93 (Formule de Leibniz)**.** *Soit I in intervalle de $\mathbb{R}$; f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$;a un point de I ainsi que $n \in \mathbb{N}^*$. Si chacune des fonctions f et g est n fois dérivable en a, alors le produit fg est n fois dérivable en a et la dérivée n-ème se calcule par :*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$