Colles semaine 22

En bref

- Dérivabilité des fonctions : définitions et propriétés de stabilité.
- Notion d'extremum local. Si une fonction dérivable admet un extremum local en un point c **intérieur**, alors $f'(c) = 0$.
- Propriété globales des fonctions dérivables sur un intervalle : Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis. Application pour montrer le théorème fondamental de l'analyse.
- Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (aussi appelé théorème de limite de la dérivée).
- Brève extension aux dérivées itérés. Notation $\mathcal{C}^n$. Formule de Leibniz.
- Brève extension des propriétés de continuité et dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes (mais toujours définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.)
- Théorie des polynômes. Définition et règles de calculs. Formules pour les coefficients d'un produit de polynômes.
- Arithmétique dans les polynômes : diviseurs, multiples, division euclidiennes.
- Racines et zéro. Multiplicité des racines.
- Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$. Théorème de D'Alembert-Gauss (aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre).

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Citer et montrer le théorème de Rolle.
- Citer sans démonstration l'inégalité des accroissements finis. L'appliquer pour montrer la convergence de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$
- Montrer le théorème de dérivabilité des bijections réciproques.
- Citer un énoncé **précis** du théorème de division euclidienne et montrer l'unicité afférente.
- Définir la multiplicité des racines d'un polynômes. Montrer que α est racine de multiplicité m d'un polynôme P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
- Montrer qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes. Citer le théorème analogue lorsque l'on considère les racines comptées avec multiplicité.
- Cas des racines de l'unité

Note aux colleurs

- Nous avons très brièvement défini les polynômes comme suites stationnaires nulles. Mais aucune considération de ce type n'est exigible. La programme identifie complètement les polynômes et les fonctions polynomiales associées.

En détails

Fonction dérivables

Reprise du programme précédent

Polynômes

1 Construction sommaire

1.1 Définitions

Définition 1. On appelle *polynôme* à coefficient dans $\mathbb{K}$ toute suite d'élément de $\mathbb{K}$ stationnaire nulle. C'est-à-dire qu'un polynôme $P = \sum_{n=0}^{p} a_p x^p$ au sens où nous l'entendons dans les classes inférieures est défini par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de ses coefficients. Cette suite est telle que $a_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Notation 2. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Le degré du polynôme est alors l'indice n du dernier coefficient n on nul.

Proposition-Définition 3. *Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme. Alors l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Si le polynôme n'est pas le polynôme nul, cet ensemble est non vide ; il admet par conséquent un maximum que l'on appelle le degré de P et que l'on note* $\deg(P)$*. Si P est le polynôme nul (c'est-à-dire la suite constante nulle), alors on prend par convention* $\deg(P) = -\infty$.

Notation 4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Définition 5 (Coefficient dominant)**.** Si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme non nul de degré p, on appelle *coefficient dominant* de P, le scalaire a_p. (C'est donc un scalaire non nul).

On dit qu'un polynôme non nul est *unitaire* si son coefficient dominant est égal à 1.

1.2 Bilan : ce qu'un étudiant de PTSI doit savoir

— Un polynôme est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

pour un certain entier n et une famille de coefficients $(a_0, \dots, a_n)$.

— Si ce polynôme n'est pas le polynôme constant nul, alors il existe au moins un coefficient qui n'est pas nul. Le degré du polynôme P de la formule précédente est alors le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. L'entier k et la famille $(a_0, \dots, a_k)$ ainsi définie est alors unique.
Autrement dit, deux polynômes sont égaux si et seulement si leur degré et leurs coefficients sont égaux.

— On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

— Pour deux polynômes $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ deux polynômes. les coefficients du polynômes $P := AB =: \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$ se calculent par la formule $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

— Enfin il faut connaître la formule de Taylor que nous donnons sous une forme légèrement différente que lors de sa première apparition :
Proposition 6 (Formule de Taylor en un réel quelconque)**.** *Soit n un entier naturel. Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ et pour tout réel a, on a la formule suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

2 Propriétés algébriques des polynômes

2.1 Somme et produit

Les règles algébriques de sommes et produits de polynômes sont exactement les mêmes que celles pour les scalaires. Citons les principales :

Proposition 7. *Soit P, Q et R trois polynômes et λ et μ deux scalaires. Les règles suivantes s'appliquent :*

i) $(\lambda+\mu)P = \lambda P + \mu P$.
ii) $\lambda(P+Q) = \lambda P + \lambda Q$.
iii) $P+Q = Q+P$.
iv) $PQ = QP$.
v) $P(Q+R) = PQ+PR$.
vi) $PQ = 0 \iff (P=0 \text{ ou } Q=0)$.
vii) $(\lambda P)Q = \lambda(PQ) = P(\lambda Q)$.
viii) $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)Q$.
ix) $(PQ)R = P(QR)$.

2.2 Liens avec le degré

Proposition 8 (degrés et produit externe)**.** *Soit P un polynôme et λ un réel Notons $p = \deg(P)$. Le polynôme λP est de degré p si $\lambda \neq 0$ et de degré $-\infty$ si $\lambda = 0$.*

Proposition 9 (Degré d'une somme)**.** *Soit P et Q deux polynômes de degré respectifs p et q et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors le polynôme $P+Q$ est de degré **au plus** $\max(p,q)$.*

Attention ! On peut donc écrire $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ mais l'égalité est fausse en général. Elle est cependant vraie lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$ ou encore lorsque les coefficients dominant de P et de Q ne sont pas opposés.

Corollaire 10. *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Par ailleurs, la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de ce sous-espace vectoriel appelée* base canonique *de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Proposition 11 (Degré d'un produit)**.** *Soit P et Q deux polynômes non nuls.*
Alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque 12. Si P ou Q est nul, alors la formule précédente reste valable à condition d'utiliser la convention $-\infty + n = -\infty$ pour tout entier n.

Proposition 13 (Coefficients d'un produit de polynômes)**.** *Soit $P : x \mapsto \sum_{n=0}^{p} a_n x^n$ et $Q : x \mapsto \sum_{n=0}^{q} b_n x^n$ deux polynômes de degrés respectifs p et q, on note $R = PQ$. On sait déjà que R est un polynôme de degré $p+q$ et on note $(c_0, \ldots, c_n)$ les coefficients de R, c'est-à-dire $R : x \mapsto \sum_{n=0}^{p+q} c_n x^n$. Alors les coefficients c_n se calculent grâce à la formule suivante :*

$$\forall n \in [\![0\,;\,p+q]\!],\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

3 Propriétés analytiques des polynômes

3.1 Dérivation

Définition 14. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme non nul de degré n. On appelle polynôme dérivée de P et on note P' le polynôme $P' : x \mapsto = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Si P est le polynôme nul, on définit $P' = 0$.

Proposition 15 (Dérivée d'une somme et d'un produit)**.** *Soit P et Q deux polynômes et α et β deux réels. Alors :*

i) $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$.

ii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Lemme 16 (Degré d'une dérivée)**.** *Soit P un polynôme de degré p. Alors P' est de degré $p-1$ si $p \geqslant 1$ et P' est le polynôme nul si P est un polynôme constant.*

3.2 Composition des polynômes

Définition 17. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ un polynôme et Q un autre polynôme. On définit le polynôme $P \circ Q$ comme le polynôme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$. *En prenant la convention $Q^0 : x \mapsto 1$.*

On peut également utiliser la notation $P \circ Q = P(Q)$.

Comme toujours, la somme contient un nombre fini de termes.

Remarque 18. Bien sûr, cette composition de polynôme est compatible avec la composition des fonctions polynomiales.

Proposition 19 (La composition est linéaire à gauche)**.** *Soit trois polynômes P, Q et R ;*
alors $(P+Q) \circ R = P \circ R + Q \circ R$

Attention. *La composition n'est pas linéaire à droite* ! Considérons $P = X^2$, $Q : x \mapsto x+2$ et $R = x$. Comparons $P \circ (Q+R)$ et $P \circ Q + P \circ R$.

Lemme 20 (degré d'une composition)**.** *Soit P et Q deux polynômes non constants.*
Alors, $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.

Attention ! Attention, lorsque Q est constant, $P \circ Q$ est constant mais peut être le polynôme nul même si Q n'est pas nul.

Proposition 21 (dérivée d'une composée)**.** *Soit P et Q deux polynômes. Alors* $(P \circ Q)' = (P' \circ Q)\, Q'$.

4 Propriétés arithmétiques des polynômes

4.1 Diviseurs et multiples

Définition 22. Soient P et Q deux polynômes. S'il existe un polynôme D tel que $P = QD$ alors on dit que P est un multiple de Q ou encore que Q est un diviseur de P. On note parfois $Q \mid P$ pour dire que Q divise P.

Lemme 23. *Si P est un multiple non nul du polynôme Q, alors* $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$.

Proposition 24 (Propriétés élémentaires de la relation de divisibilité)**.** *Soit P, Q et R trois polynômes ainsi que α et β deux réels.*

i) *Si P divise Q et P divise R, alors P divise* $(\alpha Q + \beta R)$.

ii) *Si P divise Q, alors P divise* (QR).

iii) *Si P divise Q et Q divise R, alors P divise R.*

Exercice 25. Soit P et Q deux polynômes non nuls. À quelle condition nécessaire et suffisante, P est-il à la fois un diviseur et un multiple de Q ?

En particulier montrer que si P et Q sont unitaires, que P divise Q et que Q divise R, alors ils sont égaux.

Maintenant que nous savons chercher des multiples, nous pouvons définir la notion de division euclidienne.

Théorème 26 (Théorème de division euclidienne pour les polynômes)**.** *Soit P un polynôme et D un autre polynôme non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\begin{cases} P = DQ + R \\ \deg(R) < \deg(D) \end{cases}.$$

Ces polynômes Q et R sont alors respectivement appelés quotient *et* reste *dans la division euclidienne de P par Q.*

4.2 Racines et zéros

4.2.1 Définitions

Définition 27 (Zéro d'un polynôme)**.** On dit qu'un scalaire α est un zéro d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$; autrement dit, si α est un zéro de la fonction polynomiale associée à P.

Définition 28 (Racine d'un polynôme)**.** On dit qu'un scalaire α est une racine d'un polynôme P si P est un multiple de $(X - \alpha)$.

Le miracle de la théorie des polynômes est que ces deux notions de racines et zéros qui semblent très différentes (l'une est purement arithmétique, l'autre est analytique) vont en fait coïncider.

Théorème 29. *Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, alors α est une racine de P si et seulement si c'est un zéro de P.*

Ceci est très intéressant car le nombre de racines d'un polynôme est très contraint.

Proposition 30. *Si P est un polynôme non-nul de degré n. Alors, P admet au plus n racines différentes.*

Nous avons alors un corollaire d'importance **fondamentale !**

Corollaire 31 (Un polynôme qui admet plus de racines que son degré est nul)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si P est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui admet au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.*

Corollaire 32 (Variantes)**.** *Le corollaire précédent peut s'énoncer sous diverses versions :*
- *Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ qui coïncident en $n + 1$ points distincts. C'est-à-dire s'il existe $n + 1$ scalaire distincts $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ tels que $\forall i \in [\![1\,;\,n + 1]\!],\ P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$. Alors $P = Q$.*
- *Si P est un polynôme (sans contrainte de degré) qui admet une infinité de racines, alors c'est le polynôme nul.*
- *Si P et Q sont deux polynômes qui coïncident en une infinité de points, alors ils sont égaux.*

4.2.2 Multiplicité des racines

Définition 33. Soit α une racine d'un polynôme P et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est un racine de multiplicité m dans P si $(X - \alpha)^m$ divise P mais que $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

On dit qu'une racine est simple si elle est de multiplicité égale à 1. On dit qu'elle est multiple dans le cas contraire.

Remarque 34. Par convention, on dit parfois que les multiplicité des racines du polynôme constant nul sont infinies. Le lecteur s'attachera à comprendre en quoi cette convention est compatible avec l'ensemble des résultats suivants.

Proposition 35. *Soit α une racine d'un polynôme P non constant.*
- *Si α est une racine simple de P, alors ce n'est pas une racine de P'.*
- *Si α est une racine multiple de multiplicité $m \geqslant 2$, alors α est une racine de multiplicité $m - 1$ de P'.*

Corollaire 36. *Soit P un polynôme non nul, α une racine de P et m un entier naturel non nul. Alors α est une racine de multiplicité m si et seulement si il existe un polynôme Q vérifiant les deux conditions suivantes :*

i) $P = (X-\alpha)^m Q$

ii) *et α n'est pas une racine de Q.*

Corollaire 37. *Soit P un polynôme non nul, α une racine de P et m un entier naturel non nul. Alors α est une racine de multiplicité m si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P^{(2)}(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$

ii) *et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.*

On peut enfin écrire un dernier lemme qui permet parfois de caractériser la multiplicité d'une racine.

Corollaire 38. *Soit P un polynôme non constant et α une racine de Pde multiplicité m. Alors α est une racine simple de $P^{(m-1)}$. On peut même écrire*

$$m = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \right\}.$$

4.2.3 Le théorème fondamental de l'algèbre

Lemme 39. *Soit P un polynôme non nul, alors le nombre de ses racines comptées avec leur multiplicité est inférieur ou égal à son degré.*

En fait on peut montrer, c'est un résultat très fort, que l'inégalité précédente est toujours une égalité dans le cas des polynômes complexes. Voici donc le clou du chapitre :

Théorème 40 (Théorème de D'Alembert-Gauss (Admis))**.** *Soit P un polynôme* ***à coefficient complexe*** *non nul de degré n. Alors P possède exactement n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Corollaire 41. *Tout polynôme complexes non constant admet au moins une racine.*

4.2.4 Polynômes irréductibles

Le théorème fondamental de l'algèbre permet donc d'écrire une forme factorisé des polynômes. Bien sûr, une telle forme factorisé sera plus simple pour les polynômes complexes.

Définition 42. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* s'il n'est pas constant et si tous ses diviseurs sont constants ou de degré égal à $\deg(P)$.

Remarque 43. Pour la première fois du chapitre, cette notion dépend fondamentalement du corps $\mathbb{K}$. Ainsi, le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}$ (prouvez le) mais pas dans $\mathbb{C}$ car il admet, par exemple $X - \mathrm{i}$ pour diviseur.

Théorème 44 (Reformulation du théorème de D'Alembert-Gauss)**.** *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.*

Ceci permet d'écrire une forme factorisée simple des polynômes complexes.

Proposition 45 (factorisation des polynômes, cas simple)**.** *Soit P un polynôme complexe non constant. On note $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_r)$ ses racines et $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ leur multiplicité respective.*

Alors on dispose d'un scalaire a tel que :

$$P = a \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}.$$

Le lecteur, fin limier, comprendra bien sûr que le scalaire a n'est autre que le coefficient dominant du polynôme P et que le degré du polynôme s'exprime alors comme $\deg(P) = \sum_{i=1}^{r} m_i$.

Lemme 46. *Soit P un polynôme à coefficient réel. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est également une racine de P.*

Corollaire 47. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

On en déduit les factorisations suivantes :

Théorème 48 (Factorisation des polynôme, cas général, Admis)**.** *Soit P un polynôme réel non constant. Alors on dispose d'un scalaire a, de deux entiers naturels et s et r ; de trois familles de scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $(\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_{r+s})$ et $(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_{r+s})$ ainsi que d'une famille $(m_1, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_{r+s})$) d'entiers naturels non nuls de sorte que*

$$P = a \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=r+1}^{r+s} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{m_k}.$$

et de sorte que : $\forall k \in [\![r+1\,;\,r+s]\!]$, $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$. Le lecteur, fin limier, comprendra bien sûr que le scalaire a n'est autre que le coefficient dominant du polynôme P et que le degré du polynôme ne s'exprime pas aussi simplement que précédemment.

4.3 Rappels sur les racines de l'unité

On en profite pour rappeler certains résultats cruciaux sur les racines de l'unité.

Définition 49. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine n-ième de l'unité* toute racine complexe du polynôme $X^n - 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité. Un complexe z est appelé simplement *racine de l'unité* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z \in \mathbb{U}_n$.

Proposition 50. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines n-ième de l'unité comprend n éléments et est donné par :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right) \mid k \in [\![0\,;\,n-1]\!] \right\} = \left\{ \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

L'ensemble des racines n-ième de l'unité sont en fait exactement les puissances d'un certain complexe.

Définition 51. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un complexe ω est appelé une *racine n-ième élémentaire* si $\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$.

Proposition 52 (Détermination des racines de l'unité élémentaire)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les racines n-ième élémentaires de l'unité, sont exactement les valeurs $\exp\left(\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n}\right)$ pour tout entier p premier avec n.*

Remarque 53. Par exemple, la valeur $\exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$ est une racine n-ème élémentaire de l'unité. De manière générale, si k et n sont deux entiers naturels non nuls et $\omega = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n}\right)$; alors $\left\{ \omega^k \mid k \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{U}_d$ où $d = \mathrm{PGCD}(n, p)$.