Colles semaine 23

En bref

- Théorie des polynômes. Définition et règles de calculs. Formules pour les coefficients d'un produit de polynômes.
- Arithmétique dans les polynômes : diviseurs, multiples, division euclidiennes.
- Racines et zéro. Multiplicité des racines.
- Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$. Théorème de D'Alembert-Gauss (aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre).
- Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, applications pour le calcul d'intégrales.
- Intégration : bref survol de la construction à l'aide de fonction étagées.
- Propriété quai-axiomatique de l'intégrale : positivité, linéarité, Chasles/
- Conséquences démontrées : Croissance, séparation des intégrales de fonctions continues positives, théorème fondamental de l'analyse, inégalité triangulaire (démontrée pour les fonctions réelles, admise pour les complexes).
- Approximation locale VS globale : formules de Taylor : avec reste intégral, de Taylor-Lagrange, de Taylor-Young.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Citer un énoncé **précis** du théorème de division euclidienne et montrer l'unicité afférente.
- Définir la multiplicité des racines d'un polynômes. Montrer que α est racine de multiplicité m d'un polynôme P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
- Montrer qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes. Citer le théorème analogue lorsque l'on considère les racines comptées avec multiplicité.
- Déterminer une expression de $\int\limits_0^x \frac{1}{(t+1)(t-1)(t-2)}\mathrm{d}t$ en fonction du réel x admissible. (Et quels sont les fameux réels x admissibles ?)
- Montrer que si f est une fonction continue positive sur $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si $\int\limits_a^b f = 0$, alors f est constante nulle sur $[a\,;\,b]$.
- Citer l'inégalité de Taylor-Lagrange et en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =_e xp(x)$.

Note aux colleurs

- Pour la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, le seul cas exigible des élèves est celui où le dénominateur est scindé à racine simple. Dans les autres cas, le colleur doit donner la forme générale de la décomposition. Mais on peut exiger des étudiants le calcul explicites des coefficients associés.
- Nous n'aurons probablement pas le temps de traiter les sommes de Riemann avant la fin de la semaine de colle.
- Officiellement, la formule de Taylor avec reste intégral n'apparaît pas au programme de première année mais elle apparaît au programme de seconde année. Mon avis est qu'en pratique, on se débrouille toujours avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.

En détails

Fonction dérivables

Reprise du programme précédent

Polynômes

Reprise du programme précédent

Intégration

1 Conséquences de la construction de l'intégrale

On rappelle que l'on construit l'intégrale des fonctions en escalier. En utilisant le lemme d'approximation suivant :

Lemme 1 (Approximation des fonctions continues (Admis))**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\epsilon > 0$. Il existe ϕ et ψ en escalier sur I telles que*

$$\forall x \in I,\ \ \phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) - \phi(x) \leqslant \epsilon$$

on parvient alors à définir l'intégrale des fonctions continues.

Proposition-Définition 2 (Intégrale d'une fonction continue)**.** *Soit f une fonction continue sur I. On considère alors les deux ensembles*

$$\mathcal{I}^+(f) = \left\{ \int_I \Psi \ /\ \ \Psi \in \mathcal{E}(I),\ f \leqslant \Psi \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^-(f) = \left\{ \int_I \phi \ /\ \ \phi \in \mathcal{E}(I),\ \phi \leqslant f \right\}$$

On peut montrer que $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure, notée β, et que $\mathcal{I}^-(f)$ admet une borne supérieure, notée α.

La borne inférieure de $\mathcal{I}^+(f)$ est égale à la borne supérieure de $\mathcal{I}^-(f)$. Ce nombre commun est appelé ***intégrale*** *de f est est noté $\int_I f$.*

Les conséquences à savoir de cette construction sont résumées ci-après.

1.1 Propriétés de l'intégrale

Proposition 3 (Linéarité de l'intégrale)**.** *L'intégrale des fonctions continues est une application linéaire. C'est-à-dire que, pour toutes fonctions f et g continues sur I,*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \ \int_I (\alpha.f + \beta.g) = \alpha. \int_I f + \beta. \int_I g$$

Proposition 4 (Positivité et croissance de l'intégration)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a, b]$.*

i) Si $f \geqslant 0$, alors, $\int_I f \geqslant 0$.

ii) Si $f \leqslant g$, alors, $\int_I f \leqslant \int_I g$.

iii) $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f| \leqslant (b-a) \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Définition 5. Soit f continue sur $I = [a, b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur I le nombre

$$\frac{1}{b-a} \int_I f$$

Proposition 6 (La valeur moyenne est atteinte)**.** *Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_I f = (b - a)f(c)$$

Proposition 7 (Axiome de séparation des intégrales de fonctions positives)**.** *Soit f une fonction continue et positive sur $I = [a, b]$. Si f n'est pas identiquement nulle, alors $\int_I f > 0$.*

1.1.1 Propriétés liées à l'intervalle

Proposition 8 (Formule de Chasles)**.** *Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Pour tout $c \in]a, b[$, les restrictions de f à $[a, c]$ et à $[c, b]$ sont continues par morceaux et*

$$\int\limits_{[a,b]} f = \int\limits_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int\limits_{[c,b]} f|_{[c,b]}$$

Définition 9. Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ une application et $u \in \mathbb{R}$. On appelle **translatée** de f par u la fonction, notée f_u, définie sur $[a + u, b + u]$ par

$$\forall x \in [a + u, b + u], \quad f_u(x) = f(x - u)$$

Proposition 10. *Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,*

$$\int\limits_{[a,b]} f = \int\limits_{[a+u,b+u]} f_u$$

Corollaire 11. *Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ de période T ($T > 0$). Alors, les intégrales de f sur un intervalle de longueur T sont toutes identiques. C'est-à-dire que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Définition 12. Soient J un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur J lorsque sa restriction à tout segment $I \subset J$ est continue par morceaux. On définit alors, pour tous a et b éléments de J

$$\int\limits_a^b f = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{[a,b]} f & \text{si } a \leqslant b \\ \displaystyle -\int\limits_{[a,b]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

Lemme 13 (Intégrale et parité)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur $[-a\,; a]$. Alors :*

- *Si f est paire, alors $\int\limits_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t$.*
- *Si f est impaire, alors $\int\limits_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.*

1.2 Fonctions à valeurs complexes

Définition 14. Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue (par morceaux) sur I à valeurs complexes, alors on définit son intégrale par :

$$\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_I \mathrm{Im}(f).$$

Proposition 15. *Les proriétés de linéarité et de Chasles, sont toujours valables pour l'intégrales des fonctions complexes.*

Proposition 16 (Inégalité triangulaire)**.** *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue (par morceaux) sur I à valeurs complexes, alors :*

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

2 Lien avec le calcul de primitives

2.1 Résultats théoriques

Théorème 17 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour tout $a \in I$, l'application*

$$F : x \in J \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur J qui s'annule en a.

Corollaire 18. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour tous $(a, b) \in I^2$ et toute primitive F de f sur J, on a*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Corollaire 19. *Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in I$. Alors,*

$$\forall x \in J, \;\; f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 20.
- $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$.
- Si f est continue sur J, le symbole $\int f(x)\mathrm{d}x$ désigne l'ensemble des primitives de f sur J. Si F est une primitive particulière de f sur J, on écrit souvent

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad \text{avec } \; C \in \mathbb{K}$$

2.2 Pratique de l'intégration

2.2.1 Intégration par parties

Proposition 21 (Intégration par parties)**.** *Soit $I = [a\,;\,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors :*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

2.2.2 Changement de variable

Proposition 22 (Changement de variable)**.** *Soit $I = [a\,;\,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Soit également J un segment de $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur J. Alors :*

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

Remarque 23. Cette formule est souvent utilisé "de droite à gauche" dans e cas où φ est bijective et où f est de la forme $f = g \circ \varphi^-1$ pour une fonction g continue. Alors la formule s'écrit :

$$\int_a^b (g \circ \varphi^{-1})(u)\mathrm{d}u = \int_{\varphi^{-1}(a))}^{\varphi^{-1}((b))} g(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

2.2.3 Primitives des fractions rationnelles

Méthode 24. Pour primitiver une fraction rationnelle réelle, on commence par la décomposer en élément simples dans $\mathbb{R}$ (malheureusement).

Nous devons donc savoir intégrer des termes de types $\dfrac{a}{(t-\alpha)^k}$ pour des entiers k et des réels a et $alpha$; ainsi que des termes de types $\dfrac{at+b}{(t^2+\beta t+\gamma)^k}$ pour des entiers k et des réels (a, b, β, γ) vérifiant $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (le polynôme du dénominateur n'a pas de racines réelles.) Voyons donc comment intégrer chacun de ces termes.

Proposition 25. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Alors, si $k = 1$:*

$$\int \frac{a}{t-\alpha}\mathrm{d}t = a\ln(|t-\alpha|) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

et si $k \geqslant 2$:

$$\int \frac{a}{(t-\alpha)^k}\mathrm{d}t = -\frac{a}{k-1}\frac{1}{(t-\alpha)^{k-1}} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour les termes correspondant aux polynômes irréductibles de degré deux, on les mets d'abord sous forme canonique et par changement de variable affine on se ramène au calcul de l'intégrale de terme de type $\dfrac{at+b}{(t^2+\alpha^2)^k}$ pour des entiers k et des réels a, b et α.

Voyons d'abord le cas où $k = 1$

Proposition 26. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\int \frac{2t}{t^2+\alpha^2} = \ln(|t^2+\alpha^2|) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

et

$$\int \frac{1}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

On conclut ensuite par combinaison linéaire de ces termes.

Attention ! Les méthodes qui suivent ne figurent pas officiellement au programme de PT. L'énoncé doit vous guider si un tel calcul est nécessaire.

Pour le cas $k \geqslant 2$, on se ramène par itérations au cas précédent en abaissant le degré de k puis en utilisant les lemmes suivants.

Lemme 27. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Alors :*

$$\int \frac{2t}{(t^2+\alpha^2)^k} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{k-1}} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour le terme de type $\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^k}$, on écrit $\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^k} = \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\frac{t^2}{(t^2+\alpha^2)^k}$, puis on utilise le lemme :

Lemme 28. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Alors :*

$$\int \frac{t^2}{(t^2+\alpha^2)^k} = \frac{1}{2}\frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{k-1}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{k-1}} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

3 Formules de Taylor

Théorème 29 (Formule de Taylor avec reste intégral, Hors programme en première année)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Alors,*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(b) \quad \textit{en définissant} \ R_n(b) := \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

$R_n(b)$ est appelé le reste intégral de la formule de Taylor.

Théorème 30 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$; f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. S'il existe une constante M_{n+1} vérifiant $\forall x \in I,\ |f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1}$; alors :*

$$\forall h \in \mathbb{R},\ a + h \in I \implies \left| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M_{n+1} \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarque 31. Cette inégalité de Taylor-Lagrange est encore valable pour les fonctions à valeurs complexes.

Théorème 32 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I d'intérieur non vide contenant 0. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n).$$

Remarque 33. De même, cette formule de Taylor-Young s'étend aux fonctions à valeurs complexes.

Remarque 34. La formule de Taylor-Young a ici été écrite au voisinage de 0 dans un souci de simplicité d'écriture. Le lecteur en écrira tout seul une généralisation au voisinage d'un point a quelconque.