Colles semaine 24

En bref

- Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, applications pour le calcul d'intégrales.
- Intégration : bref survol de la construction à l'aide de fonction étagées.
- Propriété quai-axiomatique de l'intégrale : positivité, linéarité, Chasles/
- Conséquences démontrées : Croissance, séparation des intégrales de fonctions continues positives, théorème fondamental de l'analyse, inégalité triangulaire (démontrée pour les fonctions réelles, admise pour les complexes).
- Approximation locale VS globale : formules de Taylor : avec reste intégral, de Taylor-Lagrange, de Taylor-Young.
- Sommes de Riemann
- Espaces vectoriels de dimension finie.
- Cardinal des familles génératrices, des familles libres, des bases dans un espace vectoriel de dimension n.
- Rang des familles finies de vecteurs.
- Dimension et somme directe, formule de Grassmann. Prouver une supplémentarité grâce à un argument dimensionnel.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer que si f est une fonction continue positive sur $[a\,;\,b]$ avec $a<b$ et si $\int_a^b f = 0$, alors f est constante nulle sur $[a\,;\,b]$.
- Citer l'inégalité de Taylor-Lagrange et en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =_e xp(x)$.
- Citer le théorème des sommes de Riemann et déterminer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.
- Citer le théorème de la base incomplète. L'appliquer en pratique pour compléter la famille $((1,1,1,1),(0,1,2,3))$ en base de $\mathbb{R}^4$.
- Déterminer le rang de la famille de matrices $\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 3\\ 8 & -5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3 & 14\\ 11 & 3\end{pmatrix}\right)$.
- Montrer que si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F\oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Note aux colleurs

- Officiellement, la formule de Taylor avec reste intégral n'apparaît pas au programme de première année mais elle apparaît au programme de seconde année. Mon avis est qu'en pratique, on se débrouille toujours avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Le théorème du rang et globalement tous les liens entre dimensions et applications linéaire ne sont pas encore au programme.

En détails

Intégration sur un segment

Reprise du programme précédent avec en plus :

0.1 Sommes de Riemann

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on considère les points de subdivision $c_k = a + k\frac{b-a}{n}$. A toute fonction continue$f$ sur $I = [a, b]$, on associe les sommes

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)\, f(c_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

appelées **sommes de Riemann**.

Proposition 1 (Théorème des sommes de Riemann)**.** *Si f est une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$, alors la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_n$, de terme général,*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

converge vers $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 2. Quitte à réaliser un changement de variable affine, on peut toujours se ramener au cas où $[a\,; b] = [0\,; 1]$. Dans ce cas, on écrit plus simplement :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Espaces vectoriels de dimensions finies

1 Théorie de la dimension

Définition 3. On dit qu'un espace vectoriel est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

1.1 Définir la dimension

Théorème 4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel (de dimension finie ou non), soit également $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

ii) La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre maximale de E. C'est-à-dire que toute sur-famille stricte est liée.

iii) La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice minimale de E. C'est-à-dire qu'aucune sous-famille stricte n'est pas génératrice de E.

Ce théorème admet un corollaire utile

Théorème 5 (Existence de bases en dimension finie)**.** *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

Exercice 6. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ et on pose $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3)$. Montrer que la famille (u, v) est libre et compléter la en une base de $\mathbb{R}^3$.

Donnons maintenant un autre résultat primordial concernant le cardinal des familles libres et génératrices.

Lemme 7 (Lemme fondamental)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que l'on dispose d'un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une famille génératrice de E : $(x_1, \ldots, x_n)$. Alors, toute famille de vecteurs de E de cardinal supérieur ou égal à $n+1$ est liée.*

Nous sommes maintenant mûr pour définir *la* dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition-Définition 8 (Théorème de la dimension)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet au moins une base et toutes les bases de E sont de même cardinal fini. Ce cardinal commun est appelée dimension de E et se note* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$*, ou simplement* $\dim(E)$ *lorsque le corps $\mathbb{K}$ est sous-entendu.*

Exemple 9. Exemples à connaître :

i) $\{0\}$ est de dimension 0. (Là encore, on pourra voir cela comme une convention).

ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

iii) $\mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est de dimension 1 ; vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il est de dimension 2.

iv) $\mathbb{K}[X]$ *n'est pas* de dimension finie.

v) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

vi) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *n'est pas* de dimension finie.

vii) L'ensemble des suites réelles u solutions de l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel de dimension 2.

viii) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *n'est pas* de dimension finie.

ix) L'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles dérivable, solutions de l'équation différentielle $f' + f = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Exercice 10. Montrer que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E peut-être muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et qu'alors $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2\dim_{\mathbb{C}}(E)$.

Théorème 11 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de E. Alors, on peut compléter cette famille en une base de E. Autrement dit, on dispose d'un entier $p \in \mathbb{N}$ et d'une famille $(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p})$ de p vecteurs telle que la concaténation $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p})$ soit une base de E.*

Remarque 12. L'entier p du théorème peut être nul, cela correspond au cas où la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est déjà une base.

Remarque 13. Ce théorème admet une version plus précise, parfois utile. À savoir que, si l'on dispose également d'une famille génératrice fixée $(e_1, \ldots, e_k)$; alors on peut se restreindre à piocher dans cette famille génératrice pour compléter notre famille libre en une base.

Théorème 14 (Cardinal des familles libres et génératrice)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :*

i) Les familles libres de E ont toutes un cardinal inférieur ou égal à n. De plus, ce sont des bases si et seulement si leur cardinal vaut exactement n.

ii) Les familles génératrices de E ont toutes un cardinal infini ou supérieur ou égal à n. De plus, ce sont des bases si et seulement si leur cardinal est fini et vaut exactement n.

1.2 Propriétés des bases

Donnons déjà un critère pour trouver une base.

Proposition 15. *Soit E de dimension n et $\mathcal{B}$ une famille de vecteur de E. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi et dans ce cas, la famille $\mathcal{B}$ est une base de E.*

i) $\mathcal{B}$ *est une famille libre.*

ii) $\mathcal{B}$ *est une famille génératrice.*

iii) $\mathcal{B}$ *est de cardinal n.*

1.2.1 Coordonnées dans une base

Proposition-Définition 16. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors pour tout vecteur $a \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que*
$a = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$. Cette famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est appelée les coordonnées *du vecteur a dans la base $\mathcal{B}$.*
Ces coordonnées sont parfois notées matriciellement $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, pour des raisons qui apparaîtront claires ultérieurement

Remarque 17. Avec les notations précédente, l'application qui à un vecteur de E associe ces coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et $\mathbb{K}^n$.

2 Dimensions et sous-espaces vectoriels

2.1 Utilisation d'un argument dimensionnel à la place d'une inclusion

La dimension permet de donner un critère simple pour prouver que deux espaces vectoriels sont égaux une fois que l'on sait que l'un est inclus dans l'autre.

Proposition 18. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées alors la troisième l'est aussi :*

i) $F \subset G$

ii) $G \subset F$

iii) $\dim(F) = \dim(G)$

2.2 Rang d'une famille

Définition 19. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $(x_1, \dots x_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang* de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ et on note $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque 20. Dans cette définition, l'espace ambiant E peut très bien être de dimension infinie.

Lemme 21. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $(x_1, \dots x_p)$ une famille de vecteurs de E. On a $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant p$ avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.*

Lemme 22. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots x_p)$ une famille de vecteurs de E. On a $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant n$ avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E.*

2.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Lemme 23 (Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels)**.** *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. On a* $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Théorème 24 (Caractérisation des sommes directes)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi et dans ce cas, F et G sont supplémentaires :*

i) $F + G = E$

ii) *La somme $F+G$ est directe.*

iii) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

Lorsque la somme de sous-espaces vectoriels n'est pas directe, on a également un résultat sur la dimension de $F+G$:

Proposition 25 (Formule de Grassmann)**.** *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a* $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Proposition-Définition 26 (Base adaptée à une somme directe)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. On se donne une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_q)$ de G. Alors la concaténation $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base du sous-espace vectoriel $(F \oplus G)$. Une telle base est dite* adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Corollaire 27 (Existence de supplémentaire)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, il existe un supplémentaire de F dans E.*