Colles semaine 25

En bref

- Espaces vectoriels de dimension finie.
- Cardinal des familles génératrices, des familles libres, des bases dans un espace vectoriel de dimension n.
- Rang des familles finies de vecteurs.
- Dimension et somme directe, formule de Grassmann. Prouver une supplémentarité grâce à un argument dimensionnel.
- Famille échelonnées sur un autre. L'échelonnement préserve le rang, le caractère libre, le caractère générateur et le sous-espace vectoriel engendré.
- Rang des applications linéaires. Théorème du rang. Rang d'une composée.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Citer le théorème de la base incomplète. L'appliquer en pratique pour compléter la famille $((1,1,1,1),(0,1,2,3))$ en base de $\mathbb{R}^4$.
- Déterminer le rang de la famille de matrices $\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 3\\ 8 & -5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3 & 14\\ 11 & 3\end{pmatrix}\right)$.
- Montrer que si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- Citer le théorème du rang et déterminer la dimension de l'espace des matrices de trace nulle.
- Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E et f est une application linéaire définie sur E ; alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$.
- Montrer que si f et g sont deux applications linéaires telle que $g \circ f$ a un sens, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$. Quel cas simples d'égalité connaît-on ?

Note aux colleurs

- Le terme « hyperplan » ne figure pas au programme de première année.
- Nous n'avons pour le moment pas introduit la notion de matrice représentative d'application linéaire. En conséquence, la formule $\dim\left(\mathcal{L}(E,F)\right) = \dim E \times \dim F$ est admise pour le moment.

En détails

Espaces vectoriels de dimensions finies

1 Théorie de la dimension

Reprise du programme précédent avec en bonus

2 Notion de famille échelonnées sur un autre

Définition 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}^*$et $(x_1, \dots x_n)$ une famille de E. Soit également une autre famille de cardinal n de E, notée $(y_1, \dots y_n)$. On dit que la famille $(y_1, \dots y_n)$ est *échelonnée* sur la famille $(x_1, \dots, x_n)$ s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ vérifiant :

$$\begin{array}{llllll} y_1 & = \lambda_{1,1} x_1 & & & & \text{avec } \lambda_{1,1} \neq 0 \\ y_2 & = \lambda_{2,1} x_1 & + \quad \lambda_{2,2} x_2 & & & \text{avec } \lambda_{2,2} \neq 0 \\ \vdots & \quad \vdots & \qquad \vdots & \ddots & & \qquad \vdots \\ y_n & = \lambda_{n,1} x_1 & + \quad \lambda_{n,2} x_2 & + \quad \cdots & + \lambda_{n,n} x_n & \text{avec } \lambda_{n,n} \neq 0 \end{array} \tag{1}$$

Remarque 2. On prendra garde que cette notion, contrairement à toutes celles présentées dans ce chapitre, dépend de l'ordre des éléments dans les familles. Deux familles échelonnées l'une sur l'autre ont par définition même cardinal.

Théorème 3. *L'échelonnement conserve les propriété de liberté de d'engendrement des familles. Autrement dit :*

i) Toute famille échelonnée sur une famille génératrice est génératrice.

ii) Toute famille échelonnée sur une famille libre est libre.

iii) Toute famille échelonnée sur une base est une base.

Application 4. Ce dernier résultat est souvent utilisé dans des espaces de polynômes.

i) Une famille de polynômes non nuls dont tous les polynômes ont des degrés deux à deux distincts est libre.

ii) Si n est fixé, une famille de polynômes qui comprend au moins un polynôme de degré k pour chaque entier $k \in [\![0\,; n]\!]$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

iii) En particulier, si $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de polynôme vérifiant $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg P_k = k$; alors c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Dans ce dernier cas, on dit parfois que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est *échelonnée en degré*.

Lemme 5 (L'échelonnement préserve le rang)**.** *Soit $\mathcal{F}$ une famille échelonnée sur $\mathcal{G}$. Alors* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ *et (donc)* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(\mathcal{G})$.

3 Dimension et applications linéaires

3.1 Rang des applications linéaires

Définition 6 (Rang d'une application linéaire)**.** Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. On appelle *rang* de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 7. Si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de dimension finie, on dit simplement que le rang de f est infini.

Proposition 8 (Image d'une famille par une application linéaire)**.** *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels et soit $\mathcal{C} = (a_1, \dots a_p)$ une famille de vecteurs de E. On note alors $f(\mathcal{C}) := (f(a_1), \dots, f(a_p))$ la famille de vecteurs de F constituée des images de $\mathcal{C}$.*

— *Si la famille $\mathcal{C}$ est liée, alors $f(\mathcal{C})$ est liée.*
— *Si la famille $\mathcal{C}$ est libre et si f est injective, alors la famille $f(\mathcal{C})$ est libre.*
— *Si la famille $\mathcal{C}$ est génératrice de E, alors la famille $f(\mathcal{C})$ est génératrice de* $\mathrm{Im}(f)$.
— *Si la famille $\mathcal{C}$ est génératrice de E et si la famille $f(\mathcal{C})$ est libre ; alors f est injective*

Corollaire 9. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels (avec dim$(E) = n$) et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de E. Alors* $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$.

Corollaire 10. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors :*

i) $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$ *avec égalité si et seulement si la fonction f est surjective.*

ii) $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité si et seulement si la fonction f est injective.*

Proposition 11 (Version géométrique du théorème du rang)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $f : E \to F$ une application linéaire. On se donne H un sous-espace vectoriel supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(f)$ *dans E. Alors, la restriction de f à H induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre H et* $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème 12 (Théorème du rang dans sa version la plus fréquemment utile)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $f : E \to F$ une application linéaire. Alors on a la formule :*

$$\dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$$

Remarque 13. Ce théorème reste en fait valable si F est de dimension infinie. En revanche, il est crucial que E soit de dimension finie.

Corollaire 14. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $f : E \to F$ une application linéaire. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi et dans ce cas, f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

i) f est injective.

ii) f est surjective.

iii) $\dim(E) = \dim(F)$.

Corollaire 15. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme de E est injectif si et seulement si il est surjectif.*

Attention ! Ce résultat n'est plus valable si E est de dimension infinie. On prendra l'exemple de l'endomorphisme de dérivation $P \mapsto P'$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

Proposition 16 (Sur le rang des composées)**.** *Soit E, F et G trois espaces vectoriels dont deux au moins sont de dimension finie. Soit également $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :*
— $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(g)$ *et il y a égalité lorsque (mais pas seulement) f est surjective.*
— $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$ *et il y a égalité lorsque (mais pas seulement) g est injective.*