Colles semaine 26

En bref

- Rang des applications linéaires. Théorème du rang. Rang d'une composée.
- Dénombrement élémentaire : p-listes, arrangements, permutations, sous-ensembles de cardinal fixé, ensembles d'applications.
- Lemme des bergers et application au calcul des coefficients binomiaux. Formule de Pascal et formule du capitaine.
- Probabilités sur les univers finis : axiomatisation de Kolmogorov. Une probabilité sur un univers finis est entièrement caractérisée par sa valeur sur les singletons.
- Probabilités conditionnelles(il s'agit bien de probabilités), indépendance d'évènements.
- Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales (en version conditionnelle ou non) et représentation en terme d'arbre. Notion de système complet d'évènements.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E et f est une application linéaire définie sur E ; alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$.
- Montrer que si f et g sont deux applications linéaires telle que $g \circ f$ a un sens, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$. Quel cas simples d'égalité connaît-on ?
- Donner une preuve combinatoire de la formule $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ ou de la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- Définir la probabilité conditionnelle et montrer qu'il s'agit bien d'une probabilité.
- Citer et montrer la formule des probabilités composées.
- Citer et montrer la formule des probabilités totales (en version conditionnelle).
- Exhiber une famille d'évènements qui sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendante

Note aux colleurs

- Nous n'avons pour le moment pas introduit la notion de matrice représentative d'application linéaire. En conséquence, la formule $\dim\left(\mathcal{L}(E,F)\right) = \dim E \times \dim F$ est admise pour le moment.
- En probabilités, on attend des étudiants qu'ils fassent une distinction claire entre les hypothèses de modélisation d'une expérience aléatoire (par nature discutable) et les calculs de probabilités qui découlent de ces hypothèses et des théorèmes généraux.
- Pas de variables aléatoires au programme cette semaine et je rappelle qu'en première année, nous ne traitons les probabilités que sur les univers finis.

En détails

Rang des applications linéaires

Reprise du programme précédent

1 Dénombrement

1.1 Un peu de théorie

Proposition-Définition 1. *Soit E un ensemble. On dit que E est fini s'il existe un entier naturel n et une bijection entre E et $[\![1\,;\,n]\!]$. De plus, dans ce cas, l'entier n est unique et s'appelle le cardinal de l'ensemble E. On le note* $\mathrm{Card}(E)$ *ou* $|E|$ *ou encore* $\#(E)$.

Lemme 2. *Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe un bijection entre E et F. Alors E est fini si et seulement si F est fini et dans ce cas, les deux ensembles E et F ont même cardinal.*

Proposition 3 (Cardinal d'une union)**.** *Soit A et B deux ensembles finis. Alors l'union $A \cup B$ et l'intersection $A \cap B$ sont des ensembles finis. De plus :*
- *Si les ensembles A et B sont disjoints, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$;*
  alors $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
- *Dans le cas général, on a :*

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)\,.$$

Proposition 4 (Cardinal d'un produit d'ensemble)**.** *Soit A et B deux ensembles finis. Alors, le produit $A \times B$ est fini et $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

Plus généralement, si l'on dispose de n ensembles finis $(A_1, \ldots, A_n)$ (pour $n \in \mathbb{N}$). L'ensemble produit est encore fini et

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Proposition 5 (Cardinal de l'ensemble des applications)**.** *Soit E et F deux ensembles finis, alors l'ensemble F^E des applications de E dans F est également fini et $\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$.*

Remarque 6. C'est cette formule qui justifie la notation F^E pour l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$. En outre, si l'on avait défini très rigoureusement la notion de fonction, on s'apercevrait que cette formule est cohérente avec la convention $0^0 = 1$

Proposition 7 (Cardinal de l'ensemble des parties)**.** *Soit E un ensemble. Alors son ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ est fini si et seulement si E est lui même fini. Dans ce cas,*

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

Remarque 8. Si $E = \emptyset$, alors l'ensemble $\mathcal{P}(\emptyset)$ est le singleton $\{\emptyset\}$, qui est de cardinal 1. La formule précédente est donc cohérente avec la convention $2^0 = 1$.

1.2 Dénombrement élémentaire : permutations, liste et arrangements

Définition 9 (Permutations)**.** Une permutation d'un ensemble E est une bijection de E dans lui-même. On note $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de E. Lorsque $E = [\![1\,;\,n]\!]$, on note encore $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1\,;\,n]\!]$.

Proposition 10 (Nombre de permutations)**.** *Soit E un ensemble, alors $\mathfrak{S}_E$ est fini si et seulement si E est fini. Dans ce cas, en notant $n = \mathrm{Card}(E)$, on a* $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_E) = n!$.

Définition 11 (p-listes)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. On appelle p-liste de E, toute collection $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ d'éléments de E. En d'autre termes, une p-liste de E est un élément de E^p. Ou encore, une p-liste est une application de l'ensemble $[\![1\,;\,p]\!]$ dans E.

Remarque 12. L'ordre des éléments dans une p-liste est important. En d'autre termes, la liste $(1,2)$ et la liste $(2,1)$ sont deux listes différentes.

Proposition 13 (Nombre de p-listes)**.** *Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors il existe n^p p-listes différentes de E*

Définition 14 (Arrangements)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. On appelle p-arrangements de E, toute collection ordonnée $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ d'éléments **distincts** de E. En d'autre termes, une p-liste est une injection de l'ensemble $[\![1\,;\,p]\!]$ dans E.

Proposition 15 (Nombre d'arrangements)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note alors $\mathcal{A}_n^p$ le nombre de p-arrangements de E. Ce nombre est fini et vaut :*

$$\mathcal{A}_n^p = \begin{cases} 0 & si\ p > n \\ n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} & si\ p \leqslant n \end{cases}.$$

1.3 Une sagesse populaire pour terminer

Le lemme des bergers, antique sagesse de nos campagnes, peut s'énoncer ainsi : « Pour dénombrer un troupeau de moutons, il suffit de compter les pattes et de diviser le total par quatre ».

Proposition 16 (Lemme des bergers)**.** *Soit E et F deux ensembles. On suppose que E est fini et on note $n = \mathrm{Card}(E)$. On suppose de plus qu'il existe un entier naturel non nul p et une fonction f de E dans F telle que chaque élément de F admette exactement p antécédent par f.*

Alors l'ensemble F est fini également et $\mathrm{Card}(F) = \frac{n}{p}$.

Remarque 17. On remarquera que les hypothèses du théorème impliquent que la fonction f est surjective et que le cardinal de E est un multiple à la fois de p et du cardinal de F.

1.3.1 Application : Les coefficients binomiaux

Application 18 (Coefficients binomiaux)**.** On rappelle que, pour deux entiers naturels n et p, on désigne par $\binom{n}{p}$ le nombre de sous-ensembles de $[\![1\,;\,n]\!]$ qui sont de cardinal p. On peut alors affirmer que :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} & \text{si } p \leqslant n \end{cases}.$$

Remarque 19. Il est évident que pour tout ensemble fini E de cardinal n, le nombre de ses parties qui sont de cardinal p est encore $\binom{n}{p}$. Une telle partie est parfois appelé une p-combinaison. C'est ce qui justifie la notation, désormais obsolète, $C_n^p = \binom{n}{p}$.

Proposition 20 (Propriétés des coefficients binomiaux.)**.** *Soit n et k deux entiers naturels et $k \leqslant n$. Nous pouvons établir les identités suivantes :*

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *(formule de pascal)*

iv) Si $k, n \geqslant 1$, alors $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. (formule du capitaine)

v) Si p est un autre entier naturel et $n \geqslant k \geqslant p$, alors $\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.

vi) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2 Axiomatique des probabilités

2.1 Terminologie

Définition 21 (Probabilité sur un ensemble fini)**.** Soit Ω un ensemble fini (que l'on appellera *univers* dans la théorie de probabilités). On appelle probabilité sur Ω une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes suivants :

i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \in [0\,;1]$.

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

iii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exemple 22. Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n)$ un univers fini. L'application $\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0\,;1] \\ A & \mapsto & \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \end{array}$ est une probabilité.

Si $\Omega = [\![1\,;n]\!]$, l'application $\mathbb{P}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in A \\ 0 & \text{si } 1 \notin A \end{cases}$$

est une probabilité.

Lemme 23 (Probabilité d'une union finie disjointe)**.** *Soit Ω un univers fini, n un entier naturel non nul et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille de sous-ensembles de Ω* ***deux à deux*** *disjoints. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarque 24. La définition **??** d'une probabilité n'est valable que si l'ensemble Ω est fini, ce qui sera toujours le cas dans ce chapitre mais plus nécessairement dans les chapitres ultérieurs de probabilité. Lorsque Ω est infini, il faut ajouter un axiome concernant la probabilité d'une union infinie de sous-ensembles.

2.2 Modélisation d'une expérience aléatoire

Définition 25 (Espaces probabilisés)**.** On appelle **espace probabilisé fini** la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où :
- Ω est un ensemble fini appelé **univers**.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire les sous-ensembles de Ω sont appelés les **évènements**.
- $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

Remarque 26. La donnée de $\mathcal{P}(\Omega)$ semble inutile, elle sera justifiée ultérieurement lorsque l'on s'autorisera à considérer des probabilités sur des espaces infini. Dans ce cas, on peut remplacer $\mathcal{P}(\Omega)$ par un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant certaines conditions.

Modéliser une expérience aléatoire c'est alors proposer un espace probabilisé cohérent avec l'expérience en question.

2.3 Calcul des probabilités

Dans toute cette section, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ désignera un espace probabilisé fini. Nous donnons quelques propriétés élémentaires des probabilités.

2.3.1 Propriétés élémentaires

Lemme 27 (Probabilité du vide)**.** $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Proposition 28 (Croissance de l'application probabilité)**.** *Pour tout couple d'évènements* (A, B), $(A \subset B) \implies (\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B))$.

Corollaire 29. *Pour vérifier qu'une application* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *est une probabilité, il suffit de vérifier les trois axiomes :*

i) $\forall A \in \mathbb{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \geqslant 0$.

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

iii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On n'a donc pas besoin de vérifier que $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

Lemme 30 (Probabilité et complémentaire)**.** *Pour tout évènement* A *:* $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *;* $\bar{A}$ *désignant le complémentaire de* A*.*

Plus généralement, pour tous évènements A *et* B *:* $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition 31 (Probabilité d'une union dans le cas général)**.** *Pour tous évènements* A *et* B *:* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Lemme 32 (Sur un univers fini, une probabilité est caractérisé par ses valeurs sur les issues)**.** *Soit* $\Omega = \{x_1, \ldots x_n\}$ *un univers fini ainsi que* $\{p_1, \ldots, p_n\}$ *une famille de réels positifs vérifiant* $\sum_{i=1}^{n} p_1 = 1$.

Alors, il existe une et une unique probabilité $\mathbb{P}$ *sur* Ω *vérifiant* $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \mathbb{P}(x_i) = p_i$.

2.3.2 Terminologie sur les évènements

Définition 33 (Vocabulaire spécifique)**.** On utilise fréquemment dans le contexte des probabilités les définitions suivantes.

- Un évènement de probabilité égale à 1 est dit *presque sûr*.
- Un évènement de probabilité nulle est dit *négligeable*.
- Un évènement singleton $A = \{\omega\}$ est appelé une *issue* ou *évènement élémentaire*.

Définition 34 (Incompatibilité)**.** On considère un entier naturel non nul n.

- Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** si leur intersection est vide, soit si $A \cap B = \emptyset$.
- Des évènements $(A_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ sont dits **globalement incompatibles** si $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i = \emptyset$.
- Des évènements $(A_i)_{i \in \int 1n}$ sont dits **deux à deux incompatibles** si $\forall (i, j) \in ([\![1\,;\,n]\!])^2,\ i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$.

Définition 35 (Système complet d'évènements)**.** Soit Ω un univers fini. On appelle **système complet d'évènements** de Ω toute famille $(A_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) telle que

- $\forall (i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2,\ i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i = \Omega$.

Remarque 36. Soit Ω un univers fini.

i) Pour tout évènement A, la famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'évènements de Ω.

ii) La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$, formée des évènements élémentaires, est un système complet d'évènements de Ω.

2.3.3 Application au calcul des probabilités

Théorème 37 (Formule des probabilités totales (Version classique))**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $(A_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ *un système complet d'évènements. Pour tout évènement* B*, on a*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Proposition 38 (Calcul à partir des probabilités élémentaires)**.** *On note* $n = \mathrm{Card}(\Omega)$ *et* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$*. Si on connaît la probabilité de chaque évènement élémentaire* $\mathbb{P}(\omega_i)$*, alors, on peut calculer la probabilité de chaque évènement :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\omega).$$

Remarque 39 (Cas des ensembles infinis). La proposition précédente se généralise si l'univers est dénombrable, elle devient en revanche très fausse si l'univers est indénombrable.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition

Définition 40 (Probabilité conditionnelle)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et B un autre évènement. La **probabilité conditionnelle de** B **sachant** A est définie par

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition 41. *Avec les notations précédentes, l'application* $\mathbb{P}_A$ *est une probabilité sur* Ω*.*

3.2 Formule de Bayes

Proposition 42 (Formule de Bayes (version simplifiée))**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Pour tous évènements* A *et* B *de probabilité non nulle, on a*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Théorème 43 (Formule des probabilités composées)**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini,* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ *une famille d'évènements telle que, pour tout* $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k\right) \neq 0$. *Alors,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap\limits_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i)$$

Théorème 44 (Formule des probabilités totale (version conditionnelle))**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $(A_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ *un système complet d'évènements tel que, pour tout* $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. *Pour tout évènement* B*, on a*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Théorème 45 (Formule de Bayes générale)**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et et* $(A_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ *un système complet d'évènements ayant tous une probabilité non nulle. Pour tout évènement* B *de probabilité non nulle, on a, pour tout* $i \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}$$

3.3 Indépendance d'évènements

3.3.1 Indépendance de deux évènements

Définition 46. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ une espace probabilisé fini. Deux évènements A et B de Ω sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 47 (Indépendance, version conditionnelle)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ une espace probabilisé fini. Soit A et B deux évènements de Ω, chacun de probabilité non nulle. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *A et B sont indépendants,*

ii) $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$,

iii) $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Remarque 48. La notion d'indépendance dépend en fait de la probabilité. Ainsi deux évènements d'un univers peuvent être indépendants selon une probabilité mais non indépendants selon une autre probabilité.

Lemme 49. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ une espace probabilisé fini. Soit A et B deux évènements de Ω. Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont indépendants ; de même que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.*

3.3.2 Indépendance d'une famille d'évènements

Définition 50. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ une famille d'évènements.

— On dit que les évènements (A_i) sont **deux à deux indépendants** si, pour tout $i \neq j$ dans $[\![1\,;\,n]\!]$, A_i et A_j sont indépendants.

— On dit que les évènements (A_i) sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie I de $[\![1\,;\,n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque 51. Ces deux notions ne coïncident pas.

i) Si une famille est mutuellement indépendante, alors elle est deux à deux indépendante. Mais la réciproque est fausse.

ii) L'indépendance mutuelle de n évènements ne dépend pas de l'ordre de ces évènements. C'est une notion très forte qui nécessite de vérifier 2^n égalités. Il est rare que l'on ait à les vérifier directement. Soit l'indépendance des évènements fait partie des hypothèses ; elle modélise des expériences aléatoires aux résultats indépendants. Soit elle est la conséquence de l'indépendance, notamment, d'autres évènements.

Proposition 52. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'évènements et $K \subset [\![1\,;\,n]\!]$. On définit une nouvelle famille (B_i) en posant $B_i = \overline{A_i}$ si $i \in K$ et $B_i = A_i$ sinon. Autrement dit, on construit une nouvelle famille en remplaçant un nombre au choix d'évènements A_i par leur complémentaire.*

i) *Si la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est deux à deux indépendantes, alors, $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'est aussi.*

ii) *Si la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est mutuellement indépendante, alors, $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'est aussi.*