Colles semaine 27

En bref

- Probabilités sur les univers finis : axiomatisation de Kolmogorov. Une probabilité sur un univers finis est entièrement caractérisée par sa valeur sur les singletons.
- Probabilités conditionnelles(il s'agit bien de probabilités), indépendance d'évènements.
- Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales (en version conditionnelle ou non) et représentation en terme d'arbre. Notion de système complet d'évènements.
- Variables aléatoires. Notion d'espérance, de variance, d'écart-type.
- Lois de Bernoulli, binomiales et uniformes. Stabilité par translation des lois uniformes. Interprétation des lois binomiales comme somme de Bernoulli mutuellement indépendante.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Définir la probabilité conditionnelle et montrer qu'il s'agit bien d'une probabilité.
- Citer et montrer la formule des probabilités composées.
- Citer et montrer la formule des probabilités totales (en version conditionnelle).
- Exhiber une famille d'évènements qui sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendante.
- Définir la loi binomiale, calculer explicitement son espérance, citer (sans calcul) sa variance.
- Définir la loi uniforme, calculer explicitement son espérance et sa variance (on présente le calcul de variance pour la loi uniforme sur $[\![0\,;n]\!]$ puis on se ramène à ce cas par translation).

Note aux colleurs

- En probabilités, on attend des étudiants qu'ils fassent une distinction claire entre les hypothèses de modélisation d'une expérience aléatoire (par nature discutable) et les calculs de probabilités qui découlent de ces hypothèses et des théorèmes généraux.
- La notion d'indépendance mutuelle d'un famille de variables aléatoires réelles a fait l'objet d'une définition mais cette notion ne sert (pour l'instant) que pour le calcul de la variance d'une somme ou l'espérance d'un produit. En conséquence calculer la loi d'un minimum, d'un maximum ou d'une somme de variables aléatoires n'est pas dans l'esprit du programme de cette semaine.

En détails

1 Axiomatique des probabilités

1.1 Terminologie

Définition 1 (Probabilité sur un ensemble fini)**.** Soit Ω un ensemble fini (que l'on appellera *univers* dans la théorie de probabilités). On appelle probabilité sur Ω une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes suivants :

i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \in [0\,;\,1]$.

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

iii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exemple 2. Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n)$ un univers fini. L'application $\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0\,;\,1] \\ A & \mapsto & \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \end{array}$ est une probabilité.

Si $\Omega = [\![1\,;\,n]\!]$, l'application $\mathbb{P}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in A \\ 0 & \text{si } 1 \notin A \end{cases}$$

est une probabilité.

Lemme 3 (Probabilité d'une union finie disjointe)**.** *Soit Ω un univers fini, n un entier naturel non nul et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille de sous-ensembles de Ω* ***deux à deux*** *disjoints. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarque 4. La définition 1 d'une probabilité n'est valable que si l'ensemble Ω est fini, ce qui sera toujours le cas dans ce chapitre mais plus nécessairement dans les chapitres ultérieurs de probabilité. Lorsque Ω est infini, il faut ajouter un axiome concernant la probabilité d'une union infinie de sous-ensembles.

1.2 Modélisation d'une expérience aléatoire

Définition 5 (Espaces probabilisés)**.** On appelle **espace probabilisé fini** la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où :

— Ω est un ensemble fini appelé **univers**.

— $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire les sous-ensembles de Ω sont appelés les **évènements**.

— $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

Remarque 6. La donnée de $\mathcal{P}(\Omega)$ semble inutile, elle sera justifiée ultérieurement lorsque l'on s'autorisera à considérer des probabilités sur des espaces infini. Dans ce cas, on peut remplacer $\mathcal{P}(\Omega)$ par un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant certaines conditions.

Modéliser une expérience aléatoire c'est alors proposer un espace probabilisé cohérent avec l'expérience en question.

1.3 Calcul des probabilités

Dans toute cette section, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ désignera un espace probabilisé fini. Nous donnons quelques propriétés élémentaires des probabilités.

1.3.1 Propriétés élémentaires

Lemme 7 (Probabilité du vide)**.** $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Proposition 8 (Croissance de l'application probabilité)**.** *Pour tout couple d'évènements* (A, B), $(A \subset B) \implies (\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B))$.

Corollaire 9. *Pour vérifier qu'une application* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *est une probabilité, il suffit de vérifier les trois axiomes :*

i) $\forall A \in \mathbb{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \geqslant 0$.

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

iii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On n'a donc pas besoin de vérifier que $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

Lemme 10 (Probabilité et complémentaire)**.** *Pour tout évènement* A *:* $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *;* $\bar{A}$ *désignant le complémentaire de* A.

Plus généralement, pour tous évènements A *et* B *:* $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition 11 (Probabilité d'une union dans le cas général)**.** *Pour tous évènements* A *et* B *:* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Lemme 12 (Sur un univers fini, une probabilité est caractérisé par ses valeurs sur les issues)**.** *Soit* $\Omega = \{x_1, \dots x_n\}$ *un univers fini ainsi que* $\{p_1, \dots, p_n\}$ *une famille de réels positifs vérifiant* $\sum_{i=1}^{n} p_1 = 1$.

Alors, il existe une et une unique probabilité $\mathbb{P}$ *sur* Ω *vérifiant* $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \mathbb{P}(x_i) = p_i$.

1.3.2 Terminologie sur les évènements

Définition 13 (Vocabulaire spécifique)**.** On utilise fréquemment dans le contexte des probabilités les définitions suivantes.

- Un évènement de probabilité égale à 1 est dit *presque sûr*.
- Un évènement de probabilité nulle est dit *négligeable*.
- Un évènement singleton $A = \{\omega\}$ est appelé une *issue* ou *évènement élémentaire*.

Définition 14 (Incompatibilité)**.** On considère un entier naturel non nul n.

- Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** si leur intersection est vide, soit si $A \cap B = \emptyset$.
- Des évènements $(A_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ sont dits **globalement incompatibles** si $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i = \emptyset$.
- Des évènements $(A_i)_{i \in \int 1 n}$ sont dits **deux à deux incompatibles** si $\forall (i, j) \in ([\![1\,;\,n]\!])^2,\ i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$.

Définition 15 (Système complet d'évènements)**.** Soit Ω un univers fini. On appelle **système complet d'évènements** de Ω toute famille $(A_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) telle que

- $\forall (i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2,\ i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i = \Omega$.

Remarque 16. Soit Ω un univers fini.

i) Pour tout évènement A, la famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'évènements de Ω.

ii) La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$, formée des évènements élémentaires, est un système complet d'évènements de Ω.

1.3.3 Application au calcul des probabilités

Théorème 17 (Formule des probabilités totales (Version classique))**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $(A_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ *un système complet d'évènements. Pour tout évènement* B*, on a*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Proposition 18 (Calcul à partir des probabilités élémentaires)**.** *On note* $n = \mathrm{Card}(\Omega)$ *et* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$*. Si on connaît la probabilité de chaque évènement élémentaire* $\mathbb{P}(\omega_i)$*, alors, on peut calculer la probabilité de chaque évènement :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)\,.$$

Remarque 19 (Cas des ensembles infinis). La proposition précédente se généralise si l'univers est dénombrable, elle devient en revanche très fausse si l'univers est indénombrable.

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Définition

Définition 20 (Probabilité conditionnelle)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et B un autre évènement. La **probabilité conditionnelle de** B **sachant** A est définie par

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition 21. *Avec les notations précédentes, l'application* $\mathbb{P}_A$ *est une probabilité sur* Ω*.*

2.2 Formule de Bayes

Proposition 22 (Formule de Bayes (version simplifiée))**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Pour tous évènements* A *et* B *de probabilité non nulle, on a*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Théorème 23 (Formule des probabilités composées)**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini,* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ *une famille d'évènements telle que, pour tout* $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} A_k\right) \neq 0$*. Alors,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap\limits_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i)$$

Théorème 24 (Formule des probabilités totale (version conditionnelle))**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $(A_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ *un système complet d'évènements tel que, pour tout* $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$*. Pour tout évènement* B*, on a*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Théorème 25 (Formule de Bayes générale)**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et et* $(A_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ *un système complet d'évènements ayant tous une probabilité non nulle. Pour tout évènement* B *de probabilité non nulle, on a, pour tout* $i \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}$$

2.3 Indépendance d'évènements

2.3.1 Indépendance de deux évènements

Définition 26. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ une espace probabilisé fini. Deux évènements A et B de Ω sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 27 (Indépendance, version conditionnelle)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ une espace probabilisé fini. Soit A et B deux évènements de Ω, chacun de probabilité non nulle. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *A et B sont indépendants,*

ii) $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$,

iii) $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Remarque 28. La notion d'indépendance dépend en fait de la probabilité. Ainsi deux évènements d'un univers peuvent être indépendants selon une probabilité mais non indépendants selon une autre probabilité.

Lemme 29. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ une espace probabilisé fini. Soit A et B deux évènements de Ω. Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont indépendants ; de même que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.*

2.3.2 Indépendance d'une famille d'évènements

Définition 30. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ une famille d'évènements.
- On dit que les évènements (A_i) sont **deux à deux indépendants** si, pour tout $i \neq j$ dans $[\![1\,;\,n]\!]$, A_i et A_j sont indépendants.
- On dit que les évènements (A_i) sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie I de $[\![1\,;\,n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque 31. Ces deux notions ne coïncident pas.

i) Si une famille est mutuellement indépendante, alors elle est deux à deux indépendante. Mais la réciproque est fausse.

ii) L'indépendance mutuelle de n évènements ne dépend pas de l'ordre de ces évènements. C'est une notion très forte qui nécessite de vérifier 2^n égalités. Il est rare que l'on ait à les vérifier directement. Soit l'indépendance des évènements fait partie des hypothèses ; elle modélise des expériences aléatoires aux résultats indépendants. Soit elle est la conséquence de l'indépendance, notamment, d'autres évènements.

Proposition 32. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'évènements et $K \subset [\![1\,;\,n]\!]$. On définit une nouvelle famille (B_i) en posant $B_i = \overline{A_i}$ si $i \in K$ et $B_i = A_i$ sinon. Autrement dit, on construit une nouvelle famille en remplaçant un nombre au choix d'évènements A_i par leur complémentaire.*

i) *Si la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est deux à deux indépendantes, alors, $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'est aussi.*

ii) *Si la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est mutuellement indépendante, alors, $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'est aussi.*

3 Variables aléatoires

Dans toute la suite de ce document, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé fini. C'est-à-dire que $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω et que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

3.1 Définitions

Définition 33. Soient Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire et E un ensemble.
Une **variable aléatoire**, notée X, sur Ω à valeurs dans E est une application $X : \Omega \to E$.
Si $E = \mathbb{R}$, alors on dit que X est une **variable aléatoire réelle** (souvent abrégé en var).

Remarque 34. Pour un univers fini, toute application est une variable aléatoire. Lorsque l'on généralisera aux univers infini, on imposera certaines contraintes pour l'application X.

Définition 35 (Indicatrice d'un évènement)**.** Soit A un évènement de l'univers fini Ω. L'application

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

est appelée **variable aléatoire indicatrice de A** et est notée $\mathbb{1}_A$.

3.1.1 Ensemble image

Définition 36. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. L'ensemble image de X, noté $X(\Omega)$ est l'ensemble des éléments de E qui ont au moins un antécédent par X.

$$X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$$

Autrement dit, $X(\Omega)$ est l'image directe de Ω par la fonction X.

Notation 37. Soit X une variable aléatoire réelle et $x \in \mathbb{R}$.
- On note $[X = x]$ l'évènement $X^{-1}(\{x\})$. Autrement dit $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.
- De manière analogue, on note $[X \leqslant x]$ l'évènement $X^{-1}(]-\infty\,; x])$. Autrement dit $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$.
- Les élèves généraliseront ce qui précède pour définir les notations $[X < x]$, $[X \geqslant x]$ et $[X > x]$.

Proposition 38. *Si X est une variable aléatoire, alors la famille d'évènements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements. On l'appelle parfois* système complet associé à la variable X.

3.1.2 Opérations sur les variables aléatoire

Proposition 39. *Soit Ω un univers de probabilité. L'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
Si de plus Ω est de cardinal n, alors la dimension de $\mathbb{K}^\Omega$ est n.

Définition 40. On définit la **variable aléatoire produit de deux variables aléatoires** X et Y par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ XY(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$

Définition 41. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω.
- Le maximum de X et de Y est la variable aléatoire Z définie par

  $$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \max\left(X(\omega), Y(\omega)\right)$$

  On note $Z = \max(X, Y)$.
- Le minimum de X et de Y est la variable aléatoire T définie par

  $$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) = \min\left(X(\omega), Y(\omega)\right)$$

  On note $T = \min(X, Y)$.

Définition 42. Soient E et F deux ensembles, $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$ une fonction (qui admet $\mathcal{D}_f$ pour domaine de définition) telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$. On définit la variable aléatoire $f(X) : \Omega \to F$ comme étant l'application composée $f \circ X$. Cette nouvelle variable aléatoire s'appelle parfois variable image de X par f.

3.2 Loi d'une variable aléatoire

3.2.1 Définition

Définition 43. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On définit **la loi de $\boldsymbol{X}$** comme étant la donné de deux éléments : l'ensemble $\mathcal{X}(\Omega)$ et l'application :

$$\begin{aligned} P_X : X(\Omega) &\to [0,1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

Attention ! Cette définition ne se généralisera pas telle quelle aux cas des univers infinis.

Remarque 44. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \notin X(\Omega)$, alors, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Méthode 45 (Détermination de la loi d'une variable aléatoire)**.** Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, il faut successivement

1) déterminer $X(\Omega)$;

2) pour chaque valeur $x \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X = x)$;

Pour le cas des univers finis, on présente souvent la loi sous forme de tableau.

Remarque 46. On a toujours

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Lorsque l'on a fini de déterminer une loi de probabilité, il est prudent de vérifier que cette propriété est bien vérifiée.
Dans le cas où l'une des valeurs $\mathbb{P}(X = x)$ est plus difficile à calculer que les autres, on peut aussi penser à utiliser cette propriété.

Attention ! Deux variables aléatoires de même loi n'ont aucune raison d'être égales, comme le montre l'exercice suivant.

3.2.2 Loi d'une variable image

Proposition 47. *Soient E et F deux ensembles, $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini et $f : E \to F$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$. On considère $Y = f(X)$ la variable aléatoire image de X par f.*
Alors $Y(\Omega)$ est l'image directe de l'ensemble $X(\Omega)$ par la fonction Y. De plus, pour tout élément $y \in Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{\{x \in X(\Omega) /\ f(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x)$$

3.3 Espérance d'une variable aléatoire

3.3.1 Définitions de l'espérance

Définition 48. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. On appelle **espérance** de X, et on note $\mathbb{E}(X)$, le nombre réel défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

Lemme 49. *Soit A un évènement de Ω. Alors, $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$.*

3.3.2 Propriétés de l'espérance

Lemme 50. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Alors,*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega)$$

Proposition 51 (Linéarité de l'espérance)**.** *L'application, qui, à une variable aléatoire réelle, associe son espérance possède des propriétés de linéarité. Ainsi, pour toutes variables aléatoires réelles X et Y définies sur Ω et tout λ réel, on a*

i) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

ii) $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$.

iii) Plus généralement, $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$.

Corollaire 52. *Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers de probabilité Ω et α et β deux réels. On pose $Z = \alpha X + \beta$ qui est bien une variable aléatoire. Alors $\mathbb{E}(Z) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta$.*

Proposition 53 (Positivité de l'espérance)**.** *Soit X une variable aléatoire réelle* ***positive ou nulle*** *sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors,*

i) $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ *;*

ii) $\mathbb{E}(X) = 0$ *si, et seulement si,* $\mathbb{P}(X=0) = 1$ *; on dit dans ce cas que la variable aléatoire X est* ***presque-sûrement nulle****.*

Corollaire 54 (Croissance de l'espérance)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors,*
si $X \leqslant Y$ (c'est-à-dire que pour toute issue ω de Ω, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$), alors, $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

3.3.3 Théorème de transfert

Théorème 55 (Théorème de transfert)**.** *Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au moins sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de sorte que la variable aléatoire $f(X)$ existe. Alors,*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

3.4 Quelques lois usuelles

3.4.1 Variables aléatoires certaines

Définition 56. Une variable aléatoire X est dite presque-sûrement constante s'il existe une valeur a telle que $\mathbb{P}(X=a) = 1$.

Proposition 57. *Si X est une variable aléatoire réelle presque sûrement constante égale à a, alors $\mathbb{E}(X) = a$.*

3.4.2 Lois uniforme

Définition 58. Soient X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini et a et b deux entiers relatifs. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[\![a\,;\,b]\!]$ et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a\,;\,b]\!])$ si

$$X(\Omega) = [\![a\,;\,b]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![a\,;\,b]\!], \ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$$

Proposition 59. *Soit X une var définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0\,;\,n]\!])$. Alors,*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}.$$

Proposition 60. *Soit X une var définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leqslant b$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a\,;\,b \rrbracket)$. Alors,*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Remarque 61. Soit a et b deux entiers avec $a \leqslant b$. Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\llbracket 0\,;\,b-a \rrbracket$, alors la variable aléatoire $Y := X + a$ suit loi uniforme sur $\llbracket a\,;\,b \rrbracket$.

3.4.3 Lois de Bernoulli

Définition 62. Soit $p \in [0\,;\,1]$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et si :

$$\mathbb{P}(X=1) = p \quad \text{(et donc)} \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p.$$

Proposition 63. *Soit $p \in [0\,;\,1]$. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors, $\mathbb{E}(X) = p$.*

3.4.4 Lois binomiales

Définition 64. Soit $p \in [0\,;\,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si $X(\Omega) = \llbracket 0\,;\,n \rrbracket$ et si :

$$\forall k \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Proposition 65. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0\,;\,1]$. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors, $\mathbb{E}(X) = np$.*

3.5 Variance et moments d'ordres supérieurs

3.5.1 Variance

Définition 66. Soit X une var sur un espace probabilisé fini. On appelle **variance** de X, et on note $\mathbb{V}(X)$, le nombre défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2\, \mathbb{P}(X = x)$$

Proposition-Définition 67. *Pour toute variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé fini, on a*

$$\mathbb{V}(X) \geqslant 0$$

*On appelle **écart-type** de X, et on note $\sigma(X)$, le nombre défini par*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Proposition 68 (Calcul pratique de variance)**.** *Pour toute variable aléatoire X sur un espace probabilisé fini, on a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Cette formule porte parfois le nom de Formule de König-Huygens.

Proposition 69. *Pour toute variable aléatoire réelle finie X, on a $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$. De plus, $\mathbb{V}(X) = 0$ si, et seulement si, X est presque sûrement constante, c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = m) = 1$.*

Proposition 70. *Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire réelle finie. Alors,*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

Définition 71. Une var X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$ est dite **centrée réduite**.

Proposition-Définition 72. *Si X est une var de variance non nulle, alors, la variable aléatoire X^* définie par*

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée réduite (c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance égale à 1) appelée ***variable aléatoire centrée réduite associée à X*** .

Proposition 73 (Variances des lois usuelles)**.** *Soit X une variable aléatoire réelle ; $n \in \mathbb{N}$; $p \in [0\,;1]$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $a \leqslant b$.*

— *Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0\,; n\rrbracket)$, alors* $\mathrm{Var}(X) = \frac{n(n+2)}{12}$.
— *Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a\,; b\rrbracket)$, alors* $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$.
— *Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors* $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.
— *Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors* $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

3.5.2 Moments

Définition 74. Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Le **moment d'ordre *k*** de X, noté $\mathbb{M}_k(X)$, est défini par

$$\mathbb{M}_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$$

Remarque 75. On a pour X une variable aléatoire réelle : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{M}_1(X)$ et
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{M}_2(X) - (\mathbb{M}_1(X))^2 = \mathbb{M}_2(X - \mathbb{E}(X))$.

Proposition 76 (Application du théorème de transfert)**.** *Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$\mathbb{M}_k(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k \mathbb{P}(X = x)$$

3.6 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 77 (Variables aléatoires indépendantes)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et toute partie B de $\mathbb{R}$ les évènements $[X \in A]$ et $[Y \in B]$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient

$$\mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Proposition 78. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé* ***fini*** $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. *Alors, X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ les évènements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient*

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])$$

Lemme 79. *Soit A et B deux évènements. Alors les variables aléatoires indicatrices $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes si et seulement si les évènements A et B le sont.*

Proposition 80 (Lemme des coalitions (pour deux variables))**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes réelles définies sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles dont les domaines de définition contiennent respectivement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Alors, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

Proposition 81. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles* ***indépendantes*** *définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors,*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Corollaire 82. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles* ***indépendantes*** *définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors,*

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}\,V(Y)$$