Colles semaine 28

En bref

- Variables aléatoires. Notion d'espérance, de variance, d'écart-type.
- Lois de Bernoulli, binomiales et uniformes. Stabilité par translation des lois uniformes. Interprétation des lois binomiales comme somme de Bernoulli mutuellement indépendante.
- Séries numériques : Définition, convergence, somme d'une série convergente. Propriété de linéarité.
- Critère de divergence grossière. Étude de séries télescopiques
- Comparaison des séries à terme positives.
- Séries de référence : Géométrique, exponentielle ou de Riemann.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Définir la loi binomiale, calculer explicitement son espérance, citer (sans calcul) sa variance.
- Définir la loi uniforme, calculer explicitement son espérance et sa variance (on présente le calcul de variance pour la loi uniforme sur $[\![0\,;\,n]\!]$ puis on se ramène à ce cas par translation).
- Montrer que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (méthode au choix de l'étudiant)
- Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (méthode au choix de l'étudiant)
- Citer le résultat sur les séries de Riemann et en déduire la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{n^\alpha}$ en fonction du paramètre α.

Note aux colleurs

- La notion d'indépendance mutuelle d'un famille de variables aléatoires réelles a fait l'objet d'une définition mais cette notion ne sert (pour l'instant) que pour le calcul de la variance d'une somme ou l'espérance d'un produit. En conséquence calculer la loi d'un minimum, d'un maximum ou d'une somme de variables aléatoires n'est pas dans l'esprit du programme de cette semaine.
- On limitera l'étude des séries à 20 minutes maximum (en comptant la question de cours éventuelle).
- Le critère d'absolue convergence n'est pas au programme de cette semaine.
- En conséquence des deux points précédents, si on a besoin d'étudier une série qui n'est pas à termes positif, il s'agira d'un cas simplissime (par exemple : une série géométrique, exponentielle ou télescopique).
- Tout étudiant qui ne précise pas explicitement l'hypothèse de positivité de la série lorsque c'est nécessaire sera présumé ignorant de son cours et sanctionné en conséquence.

En détails

Variables aléatoires

Reprise du programme précédent

Séries numériques

1 Généralités

Définition 1. Soit u une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la **somme partielle** d'indice n, notée S_n, par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la **série** associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore *la série de terme général* $\boldsymbol{u_n}$. On la note parfois $\sum u_n$.

Remarque 2. Nous parlons dans ce document des suites (u_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$. Le lecteur généralisera seul cette notion aux cas où les suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang p.

Remarque 3. Dans la notation $\sum u_n$, la variable n est muette. Si jamais, le terme u_n dépendait d'un autre paramètre, cela rendrait la notation ambigüe. Pour lever toute ambiguïté, il faudrait alors employer la notation $\sum\limits_n u_n$. Par exemple, pour $u_n = \frac{k}{2^n}$, on peut étudier la série $\sum\limits_n \frac{k}{2^n}$, dépendant d'un paramètre k fixé ; ou bien la série $\sum\limits_k \frac{k}{2^n}$ dépendant d'un paramètre n fixé. Comme nous allons le voir, ces deux séries sont de nature profondément différentes.

Définition 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\sum u_k$ **converge** lorsque la suite des sommes partielles

$$n \mapsto S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est convergente. La limite de la série s'appelle **la somme de la série** et se note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Remarque 5. On fera attention à ne pas confondre la notation $\sum u_n$ qui désigne une suite et la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui désigne la limite de cette suite, **uniquement dans le cas où cette limite existe et est finie.** On notera que, pour une série réelle, il est possible que la série soit divergente tout en admettant une limite qui vaut $\pm\infty$.

Proposition 6 (Lien suites-série)**.** *Soit u une suite réelle. On pose alors une nouvelle suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n := u_{n+1} - u_n$. Alors la suite u converge si et seulement si la série $\sum w_n = \sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.*

Remarque 7. La proposition précédente est parfois utile pour étudier la convergence certaine séries. Il faut également penser parfois à renverser le point de vue. Il arrive en effet que l'on puisse démontrer la convergence de la suite u en étudiant la convergence de la série $\sum w_n$.

Proposition 8 (Critère de divergence grossière)**.** *Si une suite u ne converge pas vers zéro (soit qu'elle n'ait pas de limite, soit qu'elle ait une limite non nulle), alors la suite $\sum u_n$ diverge.*

Remarque 9. Lorsqu'une suite u ne converge pas vers 0, on dit parfois que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement*

Attention ! Invoquer la réciproque (fausse en général) de cette proposition est l'une des plus grandes bêtises que vous pouvez écrire sur ce chapitre. Cela est sanctionné de la plus dure des façons par les correcteurs.

Proposition 10. *Si u et v sont deux suites telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient convergentes ; alors, pour tout scalaire λ la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est encore convergente et l'on peut écrire :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Attention ! L'égalité de la proposition précédente est vraie si chacune des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est convergente. En revanche, il se peut que ces séries soient divergentes mais que la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ soit convergente. On pourra considérer l'exemple de $u_n = n+1$, $v_n = n+1$ et $\lambda = -1$.

Proposition-Définition 11 (Reste d'une série convergente)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont la série $\sum u_n$ converge. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n>p}$ est le terme général d'une série convergente. La somme de cette série est appelée p-ième reste de la série $\sum u_n$ et se note R_p. Autrement dit :*

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{p} u_n$$

.

Lemme 12. *Soit u_n le terme général d'un série convergente et $p \mapsto R_p$ la suite de ses restes. Alors $\lim\limits_{p\to\infty} R_p = 0$.*

2 Les séries à termes positifs

Proposition 13 (Une remarque de bon sens mais fort utile)**.** *Soit u une suite à valeurs réelles positives. Alors la suite $n \mapsto S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_n$ est croissante et donc la série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle majorée.*

2.1 Théorèmes de comparaison des séries positives

Proposition 14 (Comparaison par minoration/majoration)**.** *Soient u et w deux suites réelles **positives**. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant w_n$, alors :*

i) Si la série $\sum w_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.

ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum w_n$ diverge également.

Remarque 15. Bien sûr ceci reste valable si l'hypothèse de majoration n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

Proposition 16 (Comparaison par domination asymptotique ; au programme de deuxième année uniquement)**.** *Soient u et w deux suites réelles **positives**. Supposons que $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(w_n)$, alors :*

i) Si la série $\sum w_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.

ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum w_n$ diverge également.

Proposition 17 (Comparaison par équivalent)**.** *Soient u et w deux suites réelles positives. Supposons que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.*

Attention ! Les théorèmes de cette section ne sont valides que pour les séries de termes positifs ! Nous verrons en Td des contre-exemples, dans le cas où les séries ne sont pas de signe constant. Employer ces théorèmes, sans se préoccuper du signe des termes de la série constitue la deuxième plus grave erreur de ce chapitre et sera sanctionné par la même peine que celle évoquée précédemment.

3 Quelques séries de référence

3.1 Les séries géométriques

Proposition 18 (Séries géométrique)**.** *Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum_n q^n$ est :*

- *convergente si $0 \leqslant |q| < 1$,*
- *divergente (grossièrement) si $|q| \geqslant 1$.*

3.2 Les séries de Riemann

Proposition 19 (Séries de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ est :*

- *convergente si $\alpha > 1$,*
- *divergente si $\alpha \leqslant 1$.*

3.3 Les séries exponentielles

Proposition 20 (Série exponentielle)**.** *Soit x un complexe fixé. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$.*