Colles semaine 30

En bref

- Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Matrice de passages d'une base à une autre. On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases fixées. Lien avec le calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur.
- Formules de changement de bases : pour les matrices représentatives ou pour les coordonnées.
- Notion de rang, de noyau et d'image d'une matrice. Théorème du rang pou les matrices.
- Étude des homothéties et projections vectorielles.
- Étude des symétries vectorielle.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer qu'un endomorphisme p est une projection si et seulement si $p \circ p = p$.
- Définir précisément les projections et symétries vectorielles. Montrer que si p et s sont les projections et symétries par rapport aux mêmes sous-espaces vectoriels, alors $2s = p + \mathrm{Id}$.
- Soit p a projection sur $F := \mathrm{Vect}((1,2,0))$ parallèlement à $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Déterminer la matrice de p dans la base canonique, puis dans une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Note aux colleurs

En détails : Représentations matricielles

Reprise du programme précédent avec en plus :

1 Quelques endomorphismes remarquables

1.1 Homothéties

Définition 1 (Rappel)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On appelle homothétie de rapport λ, l'endomorphisme :

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}. \tag{1}$$

Proposition 2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension non nulle et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors, l'homothétie h_λ est injective si et seulement si elle est surjective ; si et seulement si elle est bijective ; si et seulement si $\lambda \neq 0$ et dans ce cas $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}}$.*

Proposition 3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, λ un scalaire et h_λ l'homothétie de rapport λ. Soit enfin $\mathcal{B}$ une base de E. Alors la matrice de h_λ dans cette base s'écrit :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Remarque 4. La matrice d'une homothétie est donc identique quelle que soit la base considérée. On peut montrer (un bon exercice !) que les homothéties sont les seuls endomorphismes présentant cette particularité.

Lemme 5. *Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est une homothétie si et seulement si il admet un polynôme annulateur de degré* 1.

1.2 Projections

Proposition-Définition 6 (Projections vectorielles)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors pour tout vecteur $x \in E$, on dispose d'un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ vérifiant $x = x_F + x_G$. Alors il existe un unique endomorphisme p de E vérifiant*

$$\forall x_F \in F,\ \forall x_G \in G,\ p(x_F + x_G) = x_F$$

Cet endomorphisme s'appelle la projection sur F parallèlement à G.

Attention ! Cette définition n'a aucun sens si F et G ne sont pas supplémentaires. Le lecteur est invité à comprendre que la propriété de somme directe implique l'existence de l'endomorphisme en question et que la propriété $F + G = E$ implique l'unicité de cet endomorphisme.

Proposition 7. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit p la projection sur F parallèlement à G. On note $r = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$ de sorte que $\dim(G) = n - r$ et on se donne également une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$. On rappelle au lecteur que ceci*

veut dire que $(e_1, \dots, e_r)$ *constitue une base de* F *et que* $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ *constitue une base de* G*. Alors la matrice de* p *dans cette base s'écrit ainsi :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{array}{c} \\ \\ L_1 \longleftarrow \\ \vdots \\ L_r \longleftarrow \\ L_{r+1} \longleftarrow \\ \vdots \\ L_n \longleftarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & \dots & C_r & C_{r+1} & \dots & C_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & (0) & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ (0) & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Attention ! Si la base de la proposition précédente n'est pas adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$, alors on ne sait rien dire sur la matrice de p dans cette base.

Proposition 8 (Noyau et images des projections)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans* E*. Soit* p *la projection sur* F *parallèlement à* G*. Alors on a :*

$$F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$$
$$G = \mathrm{Im}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\, p$$

Lemme 9. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E*. Notons* p_F *la projection sur* F *parallèlement à* G *et* p_G *la projection sur* G *parallèlement à* F*.*
Alors $p_F + p_G = \mathrm{Id}_E$*. De plus,* $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}$*.*

Donnons maintenant un critère très simple qui permet de vérifier qu'un endomorphisme est ou non une projection :

Théorème 10. *Soit* E *un espace vectoriel et* p *un endomorphisme de* E*. Alors* p *est une projection si et seulement si* $p \circ p = p$*.*

Pause de lecture 1 : Si la notion de projection vous paraît encore obscure à ce stade, sortez faire du sport dehors par beau temps ! Et observez votre ombre qui n'est autre que l'image de votre corps par la projection sur le sol, parallèlement au rayons du soleil.

1.3 Symétries

Proposition-Définition 11 (Symétries vectorielles)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E*. Alors pour tout vecteur* $x \in E$*, on dispose d'un unique couple* $(x_F, x_G) \in F \times G$ *vérifiant* $x = x_F + x_G$*. Alors il existe un unique endomorphisme* s *de* E *vérifiant*

$$\forall x_F \in F,\ \forall x_G \in G,\ s(x_F + x_G) = x_F - x_G$$

Cet endomorphisme s'appelle la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Attention ! Cette définition n'a aucun sens si F et G ne sont pas supplémentaires. Le lecteur est invité à comprendre que la propriété de somme directe implique l'existence de l'endomorphisme en question et que la propriété $F + G = E$ implique l'unicité de cet endomorphisme.

Proposition 12. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On note $r = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$ de sorte que $\dim(G) = n - r$ et on se donne également une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$. On rappelle au lecteur que ceci veut dire que $(e_1, \dots, e_r)$ constitue une base de F et que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ constitue une base de G. Alors la matrice de s dans cette base s'écrit ainsi :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{array}{c} \\ L_1 \longleftarrow \\ \vdots \\ L_r \longleftarrow \\ L_{r+1} \longleftarrow \\ \vdots \\ L_n \longleftarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & \dots & C_r & C_{r+1} & \dots & C_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & (0) & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ (0) & & 1 & & & \\ & & & -1 & & (0) \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & (0) & & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Attention ! Si la base de la proposition précédente n'est pas adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$, alors on ne sait rien dire sur la matrice de s dans cette base.

Proposition 13 (Noyau et images des symétries)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors on a :*

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(s + \mathrm{Id}_E)$$
$$G = \mathrm{Im}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

Lemme 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Notons s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G et s_G la symétrie par rapport à G parallèlement à F.*
Alors $s_F = -s_G$. De plus, $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = -\mathrm{Id}_E$.

Donnons maintenant un critère très simple qui permet de vérifier qu'un endomorphisme est ou non une symétrie :

Théorème 15. *Soit E un espace vectoriel et s un endomorphisme de E. Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.*

Corollaire 16. *Une symétrie s est un endomorphisme bijectif et $s^{-1} = s$.*

Proposition 17 (Lien projection-symétrie)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et p la projection sur F parallèlement à G. Alors $s + \mathrm{Id}_E = 2p$, de plus $s \circ p = p \circ s = p$.*