Colles semaine 4

En bref

- Intégration. Nous admettons que **sur un intervalle** :
 - les fonctions continues admettent des primitives,
 - les primitives de la fonctions nulles sont exactement les constantes,
 - la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f s'annulant en a .
 On démontre toutes les propriétés de l'intégration à partir de ceci. En particulier :
 - Relation de Chasles, propriété de positivité et croissance de l'intégration. Inégalité triangulaire
 - Formule d'intégration par parties.
 - Formule de changement de variable.
- Calcul de somme, notation $\sum$.
- Extension aux produits, factorielles et coefficients du binôme.
- Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Formule du binôme de Newton.
- Exemples de sommes doubles ou triangulaires

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du$ à l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$. Interprétation géométrique ?
- Appliquer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t}) dt$. *On pourra poursuivre en calculant la valeur de l'intégrale mais cela dépasse alors la simple question de cours.*
- Rappeler et démontrer la formule de $\sum_{k=1}^n k$ ou $\sum_{k=1}^n k^2$.
- Rappeler et démontrer la formule de $\sum_{k=1}^n q^k$.
- Citer la formule de somme télescopique. L'appliquer pour retrouver la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Citer la formule du binôme et l'appliquer pour le calcul de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Note aux colleurs

- Les étudiants sont censés connaître une méthode pour calculer en autonomie des intégrales de type $\int \frac{P(t)}{Q(t)}$ lorsque P est un polynôme et Q est un polynôme de degré 2 factorisable dans $\mathbb{R}$.
- Les nombres complexes ne sont pas censés être connus des étudiants.
- Face à un calcul de sommes (particulièrement de sommes doubles), un étudiant qui se sent un peu perdu DOIT avoir le réflexe d'organiser ses termes dans un tableaux pour démarrer le calcul. Un défaut de tels réflexes sera particulièrement sanctionné.

En détail

1 Intégration

Reprise du programme précédent.

2 Calculs de sommes

2.1 Exemples à connaître

Proposition 1 (Sommes arithmétiques et géométriques). *Pour tout entier naturel n , on a :*

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} ; .$$

Plus généralement si a est une suite arithmétique et n et m deux entiers naturels vérifiant $n \leq m$, alors :

$$\sum_{k=n}^m a_k = \frac{(m-n+1)(a_n + a_m)}{2} ; .$$

Pour tout nombre réel q ,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Proposition 2. *Pour tout entier naturel n , on a :*

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; .$$

2.2 Règles de calcul

Proposition 3 (Factorisation et développement). *Soit (a_k) et (b_k) deux suites de réels et m et n des entiers naturels vérifiant $m \leq n$. Alors :*

$$i) \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k.$$

ii) *Soient λ un nombre réel, $l \in \mathbb{N}$, alors,*

$$\sum_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k.$$

$$\sum_{k=m}^n (a_k + \lambda) = \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) + (n-m+1)\lambda.$$

Proposition 4 (Règle de Chasles pour les sommes). *Soient p , q et r trois entiers naturels tels que $p < r < q$ et a une suite de réels, alors :*

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^r a_k + \sum_{k=r+1}^q a_k = \sum_{k=p}^{r-1} a_k + \sum_{k=r}^q a_k.$$

Exemple 5. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$ pour tout entier naturel n .

2.3 Changement d'indices

Méthode 6 (Décalage d'indice). Soient p, q et r des entiers avec $p \leq q$. On dit que l'on fait un décalage d'indice dans la somme $S = \sum_{k=p}^q a_k$, si l'on considère un nouvel indice $j = k + r$.

1. On a donc défini le nouvel indice j par $j = k + r$.
2. On peut écrire la relation réciproque $k = j - r$.
3. Ainsi dans la somme, le terme générique a_k devient a_{j-r} . Et les bornes $k = p$ et $k = q$ deviennent respectivement $j = p + r$ et $j = q + r$.

On peut donc écrire : $S = \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}$.

Méthode 7 (Symétrisation). Soient p, q et r des entiers avec $p \leq q$ et $S = \sum_{k=p}^q a_k$. On dit que l'on fait une symétrisation d'indice lorsque :

1. On définit un nouvel indice j par $j = q - k$.
2. On peut écrire la relation réciproque $k = q - j$.
3. Ainsi dans la somme, le terme générique a_k devient a_{q-j} . Et les bornes $k = p$ et $k = q$ deviennent respectivement $j = q - p$ et $j = 0$ (Notons que la borne supérieure devient la borne inférieure et vice versa).

On peut donc écrire : $S = \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{j=0}^{q-p} a_{q-j}$.

2.4 Une application, les sommes télescopiques

Lemme 8. Soit a une suite de complexes et p et q deux entiers naturels vérifiant $p < q$; alors :

$$\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$

Application 9 (Une nouvelle identité remarquable). Soit a et b deux réels et n un entier naturel. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \right).$$

Si, de plus n est un entier pair (et donc $n + 1$ est impair), alors :

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a + b) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k a^{n-k} b^k \right).$$

3 Extension aux produits

3.1 Règles de calcul

Proposition 10 (Règles de calcul pour les produits). Soit (a_k) et (b_k) deux suites de réels et m et n des entiers naturels vérifiant $m \leq n$. Alors :

$$i) \prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \left(\prod_{k=m}^n b_k \right).$$

ii) Soient λ un nombre réel, alors,

$$\prod_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1} \left(\prod_{k=m}^n a_k \right).$$

$$\prod_{k=m}^n (a_k^\lambda) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right)^\lambda.$$

Exercice 11. Écrire la règle de Chasles pour les produits

Proposition 12 (Changement d'indice). *Les règles de changement d'indices pour les produits sont exactement les mêmes que pour les sommes.*

Proposition 13 (Produits télescopique). *Soit a une suite de réels et p et q deux entiers naturels vérifiant $p < q$; alors :*

$$\prod_{k=p}^q \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}.$$

3.2 Factorielle et coefficients binomiaux

3.2.1 Définitions

Définition 14. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $n! := \prod_{k=1}^n k$. Le nombre $n!$ est appelé factorielle de n

Définition 15. Soient n et p deux entiers naturels, on appelle **coefficient binomial** « p parmi n », et l'on note $\binom{n}{p}$, le nombre suivant :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2.2 Propriétés élémentaires

Proposition 16 (Relation de récurrence sur les factorielles). *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $(n+1)! = (n+1)n!$ et $\frac{(n+1)!}{n+1} = n!$.*

Proposition 17 (Premières propriétés). *Les coefficients binomiaux satisfont les propriétés suivantes*

$$i) \text{ Si } p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{(n-p+1) \times (n-p+2) \times \dots \times n}{p!} = \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (n-k).$$

$$ii) \forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 18 (Symétries des coefficients binomiaux). *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leq n$, alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Proposition 19 (Formule de Pascal). *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leq n$. On suppose de plus que $n \geq 1$ et $p \geq 1$,*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Proposition 20 (Formule du capitaine). *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leq n$. On suppose de plus que $n \geq 1$ et $p \geq 1$,*

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

3.2.3 Formule du binôme

Proposition 21 (Formule du binôme de Newton).

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 22. En appliquant cette formule avec $b = 1$, il vient :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n.$$

3.3 Sommes à double indices

Définition 23. Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels à double indices et n et m deux entiers naturels. On appelle somme double, toute expression de type :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j}.$$

Cette expression désigne la valeur de la somme des éléments de l'ensemble $\{a_{i,j} \mid (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; m \rrbracket\}$.

3.3.1 Ce qu'on peut faire

Proposition 24 (Un cas favorable). Soit b et c deux suites de réels et n et m deux entiers naturels ; alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \left(\sum_{j=1}^m c_j \right).$$

Proposition 25 (sommation en lignes ou en colonnes). Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels à double indices et n et m deux entiers naturels ; alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

Ces formules correspondent à regrouper les éléments à sommer en un tableau puis à sommer lignes par lignes ou bien colonnes par colonnes.

3.3.2 Cas des sommes triangulaires

Proposition 26 (sommations triangulaires). Ce sont des sommes du type : $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$.

Les formules de sommations en lignes et en colonnes s'écrivent respectivement :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{i,j}$$

et

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j}$$