Colles semaine 5

En bref

- Calculs de sommes/produits :
  - Notation $\sum$, relations élémentaires.
  - Changement d'indices.
  - Extension aux produits. Factorielles et coefficients du binôme.
  - Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
  - Formule du binôme de Newton.
  - Exemples de sommes doubles ou triangulaires
- Géométrie cartésienne du plan :
  - Équations cartésiennes et paramétriques de droite dans le plan.
  - Équations cartésiennes et paramétriques de cercle dans le plan.
  - Définition de cosinus, sinus et tangente. Formule d'addition, de symétrie, de rotation.
  - Méthode de linéarisation, par exemple pour le calcul d'intégrales.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Rappeler et démontrer la formule de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ ou $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.
- Rappeler et démontrer la formule de $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$.
- Citer la formule de somme télescopique. L'appliquer pour retrouver la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Citer la formule du binôme et l'appliquer pour le calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- Donner une équation paramétrique d'une droite définie par une équation cartésienne ou le contraire.
- Identifier précisément la nature géométrique de l'ensemble d'équation cartésienne $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ ou un exemple approchant.
- Résoudre l'équation $\cos(2x) = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ ou un exemple approchant.
- Calculer $\int\limits_{0}^{\pi} \cos(t)\cos(2t)$ en linéarisant.

Note aux colleurs

- Toujours pas de nombres complexes, hélas. (mais c'est pour bientôt)

En détail

1 Calculs de sommes et produits

Reprise du programme précédent

2 Géométrie élémentaire

2.1 Équation de droite

Proposition 1 (Équations cartésienne de droites). *Soit Δ une droite du plan. Alors il existe un triplet de réels (a,b,c) de sorte que $(a,b) \neq (0,0)$ et que pour tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on ait l'assertion suivante :*

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \iff ax+by+c=0.$$

Remarque 2. Si (a,b,c) est un tel triplet (il n'est jamais unique), on dira que Δ est *la droite d'équation $ax+by+c=0$*. En outre si jamais, le réel b est non nul, il est courant d'écrire l'équation de droite sous la forme équivalente suivante $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Dans ce cas, le coefficient directeur de la droite est alors égal à $-\frac{a}{b}$.

Proposition 3 (Équations paramétriques de droites). *Soit Δ une droite du plan. Alors il existe un et un unique quadruplet de réels $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ de sorte que $(\alpha,\gamma) \neq (0,0)$ et que pour tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on ait l'assertion suivante :*

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \iff \left(\exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x=\alpha t+\beta \\ y=\gamma t+\delta \end{cases}\right).$$

Remarque 4. Si $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ est un tel quadruplet (il n'est pas unique), alors le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite. Si de plus $\alpha \neq 0$, alors le coefficient directeur de la droite est égal à $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Théorème 5. *Un étudiant de PTSI sait passer d'une présentation cartésienne de droite à une présentation paramétrique et vice-versa. De même, il sait trouver une équation cartésienne (ou paramétrique) d'une droite définie par :*

- *Deux points,*
- *Un point et un vecteur directeur,*
- *Un point et un vecteur normal,*
- *Un point et une droite parallèle,*
- *Un point et un coefficient directeur.*

2.2 Équation de cercle

Proposition 6 (présentation paramétrique des cercle). *Soit $A(x_a,y_a)$ un point du plan et r un réel positif, on note alors $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. Un présentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donnée par l'assertion suivante :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x,y) \in \mathcal{C} \iff \left(\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x=x_a+r\cos(t) \\ y=y_a+r\sin(t) \end{cases}\right). \tag{1}$$

Proposition 7 (Équation cartésienne d'un cercle). *Soit $A(x_a,y_a)$ un point du plan et r un réel positif, on note alors $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. Une équation cartésienne du cercle est alors donnée par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x,y) \in \mathcal{C} \iff (x-x_a)^2+(y-y_a)^2-r^2=0.$$

3 Formulaire de trigonométrie

Proposition 8 (Définitions ou presque). *On doit savoir immédiatement que*

i) $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

ii) $\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(t + 2k\pi) = \cos(t)$ *et sin*$(t + 2k\pi) = \sin(t)$.

iii) $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t) \neq 0 \implies \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

iv) $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(t) \neq 0 \implies \tan(t + k\pi) = \tan(t)$.

Proposition 9 (Formules d'addition et duplication). *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

i) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

ii) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$.

iii) $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

iv) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Proposition 10 (Valeurs remarquables). *Les valeurs suivantes doivent êtres connues par cœur :*

i) $\cos(0) = 1 \qquad \sin(0) = 0 \qquad \tan(0) = 0$.

ii) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

iii) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

iv) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

v) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *n'est pas défini.*

Proposition 11 (Inégalité fondamentale). *Pour tout réel* x*, on a* $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Proposition 12 (Symétrie axiales). *Soit* t *un réel :*

i) $\cos(-t) = \cos(t) \qquad \sin(-t) = -\sin(t)$ *(symétrie selon l'axe horizontal)*

ii) $\cos(\pi - t) = -\cos(t) \qquad \sin(\pi - t) = \sin(t)$ *(symétrie selon l'axe vertical)*

iii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$ *(symétrie selon la première bissectrice)*

Proposition 13 (Rotations). *Soit* t *un réel :*

i) $\cos(\pi + t) = -\cos(t) \qquad \sin(\pi + t) = -\sin(t)$ *(rotation d'un demi-tour)*

ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t)$ *(rotation d'un quart de tour)*

Proposition 14 (symétrie et rotation pour la tangente). *Pour tout réel* t*, les égalités suivantes sont vraies* ***à condition que les termes aient un sens****.*

i) $\tan(-t) = -\tan(t)$

ii) $\tan(\pi - t) = -\tan(t)$

iii) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\tan(t)}$

iv) $\tan(\pi + t) = \tan(t)$

v) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{-1}{\tan(t)}$

Proposition 15 (Addition pour la tangente). *Pour deux réels* x *et* y*, les égalités suivantes sont vraies* ***à condition que les termes aient un sens****.*

i) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

ii) $\tan(x - y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$

4 Propriété des fonctions trigonométriques

Proposition 16 (Propriété du cosinus)**.** *La fonction* $x \mapsto \cos(x)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$*, paire, périodique de période* 2π*, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* $x \mapsto -\sin(x)$*.*

Proposition 17 (Propriété du sinus)**.** *La fonction* $x \mapsto \sin(x)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$*, impaire, périodique de période* 2π*, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* $x \mapsto \cos(x)$*.*

Proposition 18 (Propriété de la tangente)**.** *La fonction* $x \mapsto \tan(x)$ *est définie sur tous les intervalles de type* $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}\,;\, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ *lorsque* $k \in \mathbb{Z}$*, impaire, périodique de période* π*, dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est* $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$*.*

5 Autre méthodes de calcul

5.1 Équations trigonométriques

Proposition 19 (Équations trigonométriques)**.** *Soit* $(x, a) \in \mathbb{R}^2$*. On a,*

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(a) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -a + 2k\pi) \\ \sin(x) = \sin(a) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - a + 2k\pi) \\ \tan(x) = \tan(a) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = a + k\pi) \qquad \textit{si les termes ont un sens} \end{cases}$$

5.2 Linéarisation et factorisation

La linéarisation permet de transformer un produit de cosinus ou sinus en somme de cosinus ou sinus. C'est très utile pour calculer des intégrales par exemples.

L'opération réciproque (la factorisation donc) peut servir dans certaines équations, exemple de la résolution de $\cos(x) + \cos(2x) = \sin(3x)$.