Colles semaine 6

En bref

- Équations de droites et de cercles (avec coordonnées réelles).
- Formules de trigonométries, notamment la linéarisation pour intégrer.
- Résolution d'équation trigonométrique de types $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$ ou $\tan(x) = a$.
- Rappel sur les raisonnements classiques : par l'absurde, par récurrence, par double implication, analyse-synthèse ...
- Nombre complexes : écriture algébrique et trigonométrique/exponentielle. Conjugaison
- Définition de $e^{i\theta}$ pour un réel θ et formules correspondantes (Euler, De Moivre).
- Module et argument d'un complexe. Inégalité triangulaire.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer l'existence d'un unique couple de fonction (p, i) où p est paire, i est impaire et $p + i = \exp$.
- Soit a la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$. Conjecturer puis démontrer une formule donnant a_n en fonction de n . *L'étudiant(e) doit comprendre spontanément qu'une récurrence forte est nécessaire.*
- Identifier précisément la nature géométrique de l'ensemble d'équation cartésienne $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ ou un exemple approchant.
- Résoudre l'équation $\cos(2x) = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ ou un exemple approchant.
- Démontrer l'inégalité triangulaire pour les complexes et citer sans preuves les cas d'égalité.
- Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt$. *On imposera une linéarisation avec le formalisme complexe.*
- Pour un réel θ déterminer le module et un argument de $i \pm e^{i\theta}$.
- (*Variante de la précédente*) Retrouver la formule de factorisation de $\cos(x) + \cos(y)$ en s'intéressant à $\operatorname{Re}(e^{ix} + e^{iy})$.

Note aux colleurs

- Cette semaine se concentre surtout sur l'interprétation géométrique des complexes et les règles de calculs algébriques.
- L'étude des racines de l'unité et de la résolution d'équations polynomiales complexe fera l'objet d'un chapitre futur et n'est pas au programme de cette semaine.

En détail

1 Géométrie et trigonométrie

Reprise du programme précédent

2 Méthodes de raisonnement

Théorème 1. *Un bon étudiant de PTISI maîtrise les techniques de raisonnements suivant :*

- *Raisonnement par l'absurde,*
- *Raisonnement par contraposition,*
- *Raisonnement par récurrence,*
- *Raisonnement par analyse-synthèse.*

*Un étudiant qui hésiterait sur l'un de ces raisonnements appliquera le deuxième point de ce théorème...
...et en tirera les conséquences logiques qui s'imposent !*

Remarque 2. Un étudiant qui ne maîtriserait pas des raisonnements par l'absurde datant de plusieurs millénaires sera considéré comme faisant perdre la foi de son professeur en le progrès global de l'humanité. Il sera sanctionné en conséquence.

3 Nombres complexes

3.1 Construction du corps des complexes

On définit une addition et une multiplication sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

Définition 3. On définit sur $\mathbb{R}^2$ les lois $\oplus$ et $\otimes$ suivantes :

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d).$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$

Notation 4. Nous réalisons les identifications suivantes :

1. On identifie tout réel a avec le couple $(a, 0)$.
2. $(0, 1) \otimes (0, 1) = (-1, 0)$. On identifie donc i avec le couple $(0, 1)$.
3. Tout couple (a, b) de réels sera noté $a + ib$.

3.2 Propriétés algébriques

Définition 5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre complexe z . On les note alors :

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

Tout nombre complexe z s'écrit donc de manière unique sous la forme $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ qui s'appelle la **forme algébrique** de z .

Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$ car c'est l'ensemble $\{ib ; b \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 6. Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Attention ! Écrire $z = a + ib$ ne suffit pas pour conclure que $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. Il faut également que a et b soit réels.

Proposition 7 (linéarité des parties réelles et imaginaires).

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(z') ; \operatorname{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Im}(z) + \mu \operatorname{Im}(z')$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') ; \operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z')$$

Proposition 8 (inversibilité). *Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} . C'est-à-dire un nombre tel que $zz^{-1} = 1$. Par ailleurs, cet inverse est unique.*

3.2.1 Conjugaison

Définition 9. Soit z un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre défini par :

$$\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z).$$

Proposition 10 (Propriétés de base). *Pour tous nombres complexes z et z' ,*

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda \bar{z} + \mu \bar{z}'$ (on dit que la conjugaison est $\mathbb{R}$ -linéaire);
2. $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$;
3. si de plus, $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$;
4. si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$;
5. $\bar{\bar{z}} = z$ (on dit que la conjugaison est une involution).
- 6.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad ; \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Proposition 11 (Caractérisation des réelles et imaginaires purs). *On peut caractériser les réels et les imaginaires purs.*

- Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
- Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

3.2.2 Module

Définition 12. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle **module** de z le réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2}.$$

Remarque 13. Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z n'est autre que la valeur absolue de z .

Proposition 14 (Propriétés de base). *Pour tout nombre complexe z , on a :*

1. $|\bar{z}| = |z|$;
2. $z = 0 \iff |z| = 0$;
3. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
4. si de plus $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

5. Pour tous complexes z_1 et z_2 ,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{et si } z_2 \neq 0, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Proposition 15 (Inégalité triangulaire). *Pour tous complexes z_1 et z_2 , on a :*

- 1.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

avec égalité si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+, z_1 = k z_2$ ou $z_2 = k z_1$

- 2.

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

avec égalité si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+, z_1 = k z_2$ ou $z_2 = k z_1$

4 Notation trigonométrique et exponentielle complexe

On se fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan et on considère les points I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$. On notera $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

4.1 Notation exponentielle

Notation 16 (Notation d'Euler). Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Proposition 17 (Caractérisation du cercle unité). On a, avec cette notation, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire :

i) $|e^{i\theta}| = 1$ et donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$;

ii) réciproquement, pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Proposition 18 (Règles de calculs pour l'exponentielle). Cette notation est cohérente avec les règles de calculs classiques de l'exponentielle, à savoir :

i) $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta \equiv \theta' [2\pi]$.

ii) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

iii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

iv) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Proposition 19 (Formules d'Euler). Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}).$$

Méthode 20. En écrivant pour un réel θ et un entier n , $\cos^n(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ et en développant avec la formule du binôme, on retrouve la linéarisation de $\cos^n(\theta)$.

Application 21 (Factorisation par angle moitié). Pour tout réel θ , $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Proposition 22 (Formule de De Moivre). Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Méthode 23. Cette formule permet de retrouver (après extraction des parties réelle et imaginaire) les délinéarisation de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

4.2 Modules et argument

Proposition-Définition 24. Pour tout complexe **non nul** $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$. Le réel positif r de l'égalité est unique et vaut le module de z , $r = |z|$. Par ailleurs, il existe une infinité de valeur de θ correspondante, toutes congrues modulo 2π . Une telle valeur de θ est appelé un argument de z . L'unique telle valeur de θ de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est parfois appelée argument principal de z et se note $\operatorname{Arg}(z)$. Par ailleurs l'écriture $z = re^{i\theta}$ s'appelle forme trigonométrique de z .

Corollaire 25. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Alors,

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2) [2\pi] \end{cases}$$

Méthode 26. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ?

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et $z = a + ib$. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis on cherche un argument θ de z tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

On ne connaît pas toujours une solution simple de ce système !