Colles semaine 7

En bref

- Nombre complexes : écriture algébrique et trigonométrique/exponentielle. Conjugaison
- Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un réel θ et formules correspondantes (Euler, de Moivre).
- Module et argument d'un complexe. Inégalité triangulaire.
- Traduction de problèmes géométriques, notamment :
  - Le module de l'affixe d'un vecteur correspond à une distance. L'argument d'un quotient d'affixes de vecteur correspond à un angle
  - Traduction complexe de l'alignement des points.
  - Équations complexes de droites, de médiatrices, de cercles.
  - Exemples d'écriture complexe de transformations du plan.
- Systèmes linéaires :
  - Cas pratiques de résolution. Triangularisation (voire échelonnement si nécessaire) des systèmes carrés. Et résolution « facile » des systèmes triangulaires ou échelonnée.
  - Théorème de structure de l'ensemble des solutions. Permet de trouver *toutes* les solutions une fois que l'on connaît *une* solution ainsi que la résolution du système homogène associé.

Liste de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Démontrer l'inégalité triangulaire pour les complexes et citer sans preuves les cas d'égalité.
- Pour un réel θ déterminer le module et un argument de $\mathrm{i} \pm \mathrm{e}^{i\theta}$.
- (*Variante de la précédente*) Retrouver la formule de factorisation de $\cos(x) + \cos(y)$ en s'intéressant à $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right)$.
- Montrer que si X est une solution particulière d'un système $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions du système homogène associé, alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{L}$ est $\{X + Z_0 \mid Z_0 \in \mathcal{S}_0\}$.
- Rappeler sans preuve à quelle condition un système triangulaire est de Cramer. Puis, montrer que le système $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Note aux colleurs

- La résolution générique d'équations complexes de degré 2 n'a pas été vue. L'étude des racines de l'unité ne figure pas non plus au programme.
- Pour la partie système linéaire, nous en sommes aux balbutiement. On se contentera de poser les questions de cours et de donner des exemples de systèmes à résoudre.
- Nous avons traité vendredi le formalisme matriciel pour les systèmes linéaires. Si certains étudiants veulent l'utiliser, on les laisse faire mais on ne leur imposera pas ce formalisme pour cette semaine.

En détail

1 Nombres complexes

Reprise du programme précédente avec en plus :

1.1 Affixe des points et vecteurs

Dans toute la suite du document, nous considérons un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 1 (Affixes)**.** Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A). On appelle *affixe du point* A, le nombre complexe suivant $z_A = x_A + \mathrm{i}y_A$.

De même, si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées (x_u, y_u), alors l'affixe du vecteur $\vec{u}$ est $z_u := x_u + \mathrm{i}y_u$.

Lemme 2 (La norme d'un vecteur est donnée par le module de son affixe)**.** *Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe z, alors la norme de $\vec{u}$ vaut $\|u\| = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$.*

De même, si A et B sont deux points d'affixe respectives z_A et z_B, alors la distance entre A et B vaut $AB = |z_B - z_A|$.

Lemme 3 (Caractérisation du cercle trigonométrique)**.** *L'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique est exactement l'ensemble $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$ qui est égal à $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in [0\,;\,2\pi[\right\}$.*

1.2 Rappels sur les transformations du plan

Définition 4. Une transformation du plan est une application définie sur un plan, à valeurs dans ce même plan. Autrement dit, il s'agit d'une fonction qui, à tout point du plan, associe un autre (éventuellement identique) point du plan.

Exemple 5 (translation)**.** Soit $\overrightarrow{\mathrm{u}}$ un vecteur du plan. On appelle *translation de vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{u}}$ la transformation du plan qui à tout point M associe le point $M' = M + \overrightarrow{\mathrm{u}}$. C'est-à-dire que M' est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \overrightarrow{\mathrm{u}}$.

Exemple 6 (rotation)**.** Soit θ un réel et O un point du plan. On appelle *rotation de centre O et d'angle θ* la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' situé sur le cercle de centre O et de rayon OM et de sorte que l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = \theta$.

Exemple 7 (homothétie)**.** Soit λ un réel et O un point du plan. On appelle *homothétie de centre O et de rapport λ* la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Remarque 8. Si $\lambda = 0$, alors l'homothétie de rapport nul envoie tous les points sur O.

Exemple 9 (symétrie orthogonale)**.** Soit Δ une droite du plan. On appelle *symétrie orthogonale d'axe* Δ la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' de sorte que Δ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

Comment traduire mathématiquement l'action de telles transformations sur les affixes des points ?

1.2.1 Les cas à connaître par cœur

Proposition 10 (Écriture complexe des translations)**.** *Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe z_u et M un point du plan d'affixe z. Alors l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point M' d'affixe $z + z_u$.*

Proposition 11 (Écriture complexe des rotations de centre O)**.** *Soit θ un réel et M un point du plan d'affixe z. Alors l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ est le point M' d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$.*

Proposition 12 (Écriture complexe des homothéties de centre O)**.** *Soit λ un réel positif et M un point du plan d'affixe z. Alors l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport λ est le point M' d'affixe λz.*

Proposition 13 (Transformation associé à la conjugaison)**.** *Soit M un point d'affixe z. Alors l'image de M par la symétrie orthogonal d'axe la droite des réels est le point M' d'affixe $\bar{z}$.*

1.2.2 Et les cas décentrés ?

Si l'on a affaire à une rotation ou une homothétie dont le centre n'est pas l'origine du repère son écriture complexe n'est pas aussi simple. Le mieux est alors de la retrouver à la main en se rappelant que le centre de la transformation est par définition invariant.

Méthode 14. Soit A un point d'affixe z_A et θ un réel ainsi que λ un réel positif. Soit également M un point quelconque d'affixe z. Alors :
- L'affixe z_r de l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ vérifie $(z_r - z_A) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_A)$.
- L'affixe z_h de l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport λ vérifie $(z_r - z_A) = \lambda(z - z_A)$.

Méthode 15. Soit (a, b) deux complexes fixés (avec $a \neq 0$) et f la transformation du plan qui a tout point d'affixe z associe le point d'affixe $z' = az + b$.

Pour interpréter géométriquement cette transformation :

1) Si $a = 1$, il s'agit d'une translation et c'est trivial.
2) Sinon, on résout l'équation $z = az + b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Elle admet une unique solution qu'on note z_C et on note C le point du plan correspondant.
3) On prouve alors que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) - z_C = a(z - z_C)$.
4) On en déduit par des arguments élémentaires que f est la composée de la rotation de centre C et d'angle $\arg(a)$ avec l'homothétie de centre C et de rapport $|a|$.

1.3 Quelques exemples d'équations complexes à résolution géométriques

1.3.1 Alignement des points

Commençons par un rappel basique :

Proposition 16. *Trois points A, B et C (distincts) sont aligné si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires. Autrement dit, si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$.*

Cela conduit naturellement à la proposition suivante.

Proposition 17. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z'. Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si*

$$(\exists k \in \mathbb{R}, z = kz') \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{R}, z' = k) \tag{1}$$

Remarque 18. Si les deux complexes z et z' sont chacun non nuls alors les deux parties de la propriété précédentes sont équivalentes.

Corollaire 19 (Équation complexe de droite)**.** *Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B ainsi que M un point quelconque d'affixe z. Alors M appartient à la droite (AB) si et seulement si son affixe vérifie $\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}$.*

Remarque 20. De plus M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si son affixe vérifie $\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \in [0\,;\,1]$.

1.3.2 Médiatrice

On rappelle que la médiatrice d'un segment $[AB]$ désigne le lieu des points qui sont équidistants à A et B.

Proposition 21 (Équation complexe de droite)**.** *Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B ainsi que M un point quelconque (distinct de B) d'affixe z. Alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si son affixe vérifie $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1$.*

1.3.3 Équations de cercle

Comme on sait calculer la distance entre deux points à l'aide du module, on peut facilement déterminer des équations de cercles.

Proposition 22 (Équation complexe de cercle dont on connaît le centre et le rayon). *Soit A un point distinct d'affixe z_A et r un réel positif ainsi que M un point quelconque d'affixe z. Alors M appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si son affixe vérifie $(z - z_A)(\bar{z} - \bar{z_A}) = r^2$.*

Proposition 23 (Équation complexe de cercle dont on connaît le diamètre). *Soit A un point distinct d'affixe z_A, B un point d'affixe z_B et r ainsi que M un point quelconque (distinct de B) d'affixe z. Alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si son affixe vérifie $\frac{z-z_A}{z-z_B} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.*

2 Systèmes linéaires

2.1 Notations générales et vocabulaire

Définition 24. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, x_2, \cdots, x_p$ tout système $(\mathcal{L})$ d'équations du type :

$$(\mathcal{L}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,j}x_j + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ un n-uplet de scalaires appartenant à $\mathbb{K}$.

— Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système.
— $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système.
— On dit que le système est **homogène** ou qu'il est **sans second membre** lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.
— On appelle **solution du système** toute p-liste $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de $(\mathcal{S})$.
— Le système $(\mathcal{L})$ est dit **compatible** s'il admet au moins une solution, sinon on dit qu'il est **incompatible**.
— On appelle **système homogène associé à** $(\mathcal{L})$, et on notera $(\mathcal{L}_0)$, le système obtenu en remplaçant tous les b_i par 0.
— On dit qu'un **système** est **carré** s'il a autant d'équations que d'inconnues.
— Un système carré est dit **triangulaire supérieur**, si :
$\forall (i,j) \in (\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)^2,\ (i > j) \implies a_{i,j} = 0$
Il est dit triangulaire inférieur si : $\forall (i,j) \in (\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)^2,\ (i < j) \implies a_{i,j} = 0$

Afin de simplifier certains des résultats de ce cours, nous emploierons également les notations suivantes permettant de définir une addition sur les n-uplets de scalaires.

Notation 25. Soit $m \in \mathbb{N}$; $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un élément de $\mathbb{R}^m$ et $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ un autre élément de $\mathbb{R}^m$.
— On note $X + Y := (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)$
— Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\lambda X := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m)$.

Exemple 26. On écrira alors $(1,\ 2,\ 3) + 4(0,\ -1, \frac{3}{2}) = (1\ -2,\ 9)$.

2.2 Résolution des systèmes linéaires

2.2.1 Commençons par la facilité

Proposition 27. *Un système triangulaire carré admet une et une unique solution si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. C'est-à-dire, dans les notations précédentes, que le système*

$$(\mathcal{L}) : \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,j}x_j + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ + a_{3,3}x_3 + \cdots + a_{3,j}x_j + \cdots + a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ \ddots \qquad\qquad & & \vdots \\ a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

admet une et une unique solution si et seulement si si et seulement si $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$.

Remarque 28. Dans le cas où la condition précédente n'est pas respectée, c'est-à-dire si un coefficient diagonal est nul, alors le système peut admettre soit aucune solution, soit une infinité de solution. Précisons cela dit que si le système est homogène (c'est-à-dire se second membre nul) et triangulaire avec au moins un coefficient diagonal nul, alors il admet une infinité de solutions.

Attention ! Bien sûr, si le système n'est pas triangulaire, l'étude des coefficients diagonaux ne fournit aucune information quant à la nature des solutions.

2.2.2 De l'art de se ramener aux cas connus

Théorème 29. *Tout système carré peu être transformé en système triangulaire par une succession d'opérations élémentaires. Le principe étant de triangulariser colonne par colonne en commençant par la colonne de gauche.*

2.2.3 Et le cas des systèmes non carrés ?

Méthode 30 (Cas avec plus d'inconnues que d'équations)**.** Pour un système avec plus d'inconnues que d'équations, on échelonne le système. Puis, on considère temporairement, les inconnues supplémentaires comme paramètres. On exprime les autres inconnues à l'aide de ces paramètres. Et enfin, on conclut en donnant une présentation paramétrique de l'ensemble des solutions.

Méthode 31 (Cas avec plus d'équations que d'inconnues)**.** Pour un système avec plus d'équations que d'inconnues, on échelonne le système. Ceci conduit à la fin à exprimer des équations supplémentaires ne dépendant d'aucune inconnue. Ces équations sont dites *non-principales.* Selon qu'elles soient vraies ou fausses, le système admet ou non des solutions.

2.3 Tentative de généralisation de la méthode

2.3.1 Opérations élémentaires

Définition 32. On dit que deux systèmes linéaires de même format (même nombre d'inconnues et même nombre d'équations) sont équivalents lorsqu'ils ont même ensemble de solutions.

Définition 33. Notons $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ les lignes du système linéaire $\mathcal{L}$. On appelle opération élémentaire sur le système linéaire, les trois opérations suivantes :

- La permutation de lignes : pour deux indices $(i, j) \in ([\![1\,;\,n]\!])^2$, l'échange de la ligne L_i avec la ligne L_j. On note $L_i \leftrightarrow L_j$
- La dilatation : pour un indice $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ et pour un réel λ **non nul**, on multiplie la ligne L_i par λ. On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- La transvection (ou combinaison) : pour deux indices $(i, j) \in ([\![1\,;\,n]\!])^2$ avec $i \neq j$ et un scalaire α, on remplace L_i par la combinaison $L_i + \alpha L_j$. On note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Théorème 34. *Les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire qui est équivalent. Autrement dit, les opérations élémentaires préservent l'ensemble des solutions d'un système.*

Attention ! En toute rigueur, on effectue les opérations élémentaire une par une. On peut parfois, pour rédiger plus vite, en effectuer plusieurs à la fois. Mais il faut alors prendre garde à ne pas faire n'importe quoi. Par exemple on en peut pas pratiquer simultanément les deux opérations suivantes : $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + 2L_2 \end{cases}$.

Attention ! Il faut également prendre garde à ce que le coefficient de dilatation soit toujours non nul. Cela semble évident, mais lorsque l'on travaille avec des systèmes à paramètres, cela impose parfois de faire des disjonction de cas.

2.3.2 Algorithme du pivot de Gauss

Théorème 35. *Tout système carré peut être transformé en un système triangulaire équivalent à l'aide d'une succession d'opérations élémentaires.*

Théorème 36. *Tout système général peut-être transformé en un système échelonné par une succession d'opérations élémentaires.*

2.4 Structure de l'ensemble des solutions

2.4.1 Cas des systèmes homogènes

Commençons par une remarque triviale mais finalement intéressante :

Remarque 37. Le p-uplet $(0, 0, \cdots, 0)$ est toujours solution du système **homogène** $\mathcal{L}_0$.

Lemme 38 (Principe de linéarité)**.** *Si $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est une solution particulière du système homogène $\mathcal{L}_0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le p-uplet $(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_p)$ est également solution. Si de plus $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_p)$ est une autre solution, alors $(x'_1 + x_1, x'_2 + x_2, \cdots, x'_p + x_p)$ est également solution.*

Ce lemme anodin a déjà une conséquence importante.

Corollaire 39. *Un système linéaire homogène admet soit une unique, soit une infinité de solutions.*

Remarque 40. Un système linéaire homogène admettant strictement moins d'équations que d'inconnues (cas $n < p$ dans nos notations) admet une infinité de solutions.

Nous prouverons cette dernière remarque au chapitre sur la dimension des espaces vectoriels.

2.4.2 Cas des systèmes affines

Lorsqu'on ajoute un second membre, la situation évolue car le système peut n'avoir aucune solution. C'est néanmoins le seul cas supplémentaire possible par rapport au cas homogène.

Lemme 41. *Considérons deux p-uplets $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ et $y = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$ et supposons que x soit solution du système $\mathcal{L}$. Alors y est solution de $\mathcal{L}$ si et seulement si le p-uplet $x - y$ est solution du système homogène $\mathcal{L}_0$.*

Ceci permet de décrire l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ pourvu que l'on en connaisse au moins une.

Théorème 42 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *Notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ les ensembles respectifs des solutions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_0$. Soit également $X := (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une solution particulière de $\mathcal{L}$. Alors, on peut écrire l'ensemble des solutions de $\mathcal{L}$ comme :*

$$\mathcal{S} = \{X + Y \mid Y \in \mathcal{S}_0\} = \{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_p + y_2) \mid (y_1, y_2, \cdots, y_p) \in \mathcal{S}_0\}$$

Autrement dit, on obtient à partir d'une solution particulière, toutes les solutions en ajoutant les solutions du système homogène.

Corollaire 43. *Un système linéaire admet soit aucune, soit une unique, soit une infinité de solutions.*

On peut même être plus précis, l'unicité de la solution d'un système linéaire ne dépend que du système homogène associé

Proposition 44. *Pour un système linéaire $\mathcal{L}$ et son système homogène associé $\mathcal{L}_0$, nous avons les résultats suivants :*

— *Si $\mathcal{L}_0$ admet une unique solution, alors $\mathcal{L}$ admet soit aucune, soit une unique solution.*
— *Si $\mathcal{L}_0$ admet une infinité de solutions, alors $\mathcal{L}$ admet soit aucune, soit une infinité de solutions.*

Par ailleurs, pour les systèmes carrés, on peut être plus précis. Un système carré admet une et une unique solution si et seulement si le système homogène associé admet une unique solution.

Définition 45 (Système de Cramer)**.** Un système linéaire carré est dit de Cramer s'il admet une unique solution.

Corollaire 46. *Pour un système carré, la propriété d'être de Cramer ne dépend que du système homogène associé.*

Théorème 47 (Cas des systèmes triangulaire)**.** *Un système carré triangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*

Proposition 48. *Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Le système* $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ *est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*

Remarque 49. Un système linéaire avec strictement moins d'équations que d'inconnues admet soit aucune, soit une infinité de solutions.