

Colles semaine 8

En bref

- Système linéaires : définition et vocabulaire.
- Cas pratiques de résolution. Triangularisation (voire échelonnement si nécessaire) des systèmes carrés. Et résolution « facile » des systèmes triangulaires ou échelonnée.
- Lien entre les solutions d'un système linéaire et celles de son système homogène associé.
- Matrices : formules de sommes et de produit.
- Transposées des matrices.
- Traduction matricielle des systèmes linéaires.
- Équivalence logique entre l'inversibilité des matrices carré et le caractère de Cramer des systèmes linéaires associés.
- Algorithme pratique pour déterminer l'inversibilité et l'éventuel inverse d'une matrice carrée.
- Critère du déterminant pour l'inversibilité d'une matrice (ou le caractère de Cramer d'un système 2×2).

Liste de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Montrer que si X est une solution particulière d'un système $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions du système homogène associé, alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{L}$ est $\{X + Z_0 \mid Z_0 \in \mathcal{S}_0\}$. *Les étudiants doués de recul réussiront à présenter une preuve efficace exploitant l'écriture matricielle des systèmes. Mais j'ai présenté la preuve en cours avant d'avoir introduit les matrices.*
- Rappeler sans preuve à quelle condition un système triangulaire est de Cramer. Puis, montrer que le système $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
- Citer la formule de produit matriciel. L'appliquer pour montrer la formule $(AB)^T = B^T A^T$; ou bien (choix du colleur) pour montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
- Citer le lemme de produit matriciel en colonne et en déduire que si le système matriciel carré $AX = Y$ est de Cramer, alors la matrice A est inversible. *On prouve l'inversibilité à droite et le miracle des matrices carrées entraîne l'inversibilité.*

Note aux colleurs

- Chaque étudiante et étudiant aura à un moment ou l'autre de sa colle à inverser une matrice.
- La propriété qui affirme que l'unicité de la solution d'un système carré entraîne son existence est connue des élèves sous le nom de « miracle des systèmes carrés ».
- De même, on appelle « miracle de l'inversibilité carrée » le fait que l'inversibilité à gauche d'une matrice carrée entraîne son inversibilité à droite et vice-versa. Nous avons admis ce fait mais les étudiants ont compris qu'il s'agit d'un seul et même miracle.
- Afin d'exprimer simplement les formules de produit matriciel, nous adoptons la notation $A[i, j]$ pour désigner le coefficients de la matrice A en i -ème ligne et j -ème colonne. Ceci ayant pour avantage non négligeable de bien préciser que ce coefficient est une fonction de la matrice A .

En détail

1 Systèmes linéaires

Reprise du programme précédent

2 Le formalisme matriciel

2.1 Matrices

Une matrice est simplement un tableau de nombre. On va définir sur ces tableaux des opérations d'addition et de multiplication.

2.1.1 Définition

Définition 1. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes un tableau de scalaires (réels ou complexes) $(A[i, j])_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

On la représente par un tableau rectangulaire $A = \begin{pmatrix} A[1, 1] & A[1, 2] & \dots & A[1, p] \\ A[2, 1] & A[2, 2] & \dots & A[2, p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A[n, 1] & A[n, 2] & \dots & A[n, p] \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne les matrices à coefficients réels et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ les matrices à coefficients complexes). On note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Définition 2 (Matrice nulle). On appelle matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent zéro. On la note $0_{n,p}$ ou simplement 0_n pour la matrice nulle carrée de taille n .

2.1.2 Calcul matriciel

Définition 3 (Addition de matrices de même format). Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on définit la matrice $A + B$ par :

$$\begin{cases} A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, (A + B)[i, j] = A[i, j] + B[i, j]. \end{cases}$$

Attention ! La somme $A + B$ n'est définie que si les matrices A et B sont de même format.

Définition 4 (Multiplication externe). Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on définit la matrice λA par :

$$\begin{cases} \lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, (\lambda A)[i, j] = \lambda A[i, j]. \end{cases}$$

Proposition 5. Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Les opérations d'addition et de produit externes des matrices $n \times p$ vérifient les règles suivantes. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :

- i) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
- ii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- iii) $A + B = B + A$.

Définition 6 (Produit matriciel). Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors on définit la matrice AB par :

$$\begin{cases} AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; q \rrbracket, (AB)[i, j] = \sum_{k=1}^p A[i, k]B[k, j]. \end{cases}$$

Attention ! Le produit AB est défini uniquement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Les règles du produit matriciel diffèrent légèrement de celles de la multiplication dans $\mathbb{K}$. Notons les deux principales différences.

Attention ! Soit n, p et q trois entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

L'égalité $AB = 0_{n,q}$ **n'implique pas** en général que l'une des deux matrices A ou B est nulle.

Exemple 7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Attention. Le produit n'est pas commutatif ! On **n'a pas** en général $AB = BA$. Premièrement l'un de ces termes peut être défini sans que l'autre ne le soit. Deuxièmement même lorsque ces deux termes ont un sens (le lecteur se demandera quand se produit ce cas), ils peuvent être de formats différents. Troisièmement, lorsque ces deux termes existent et sont de même format, ils peuvent encore être différents.

Exemple 8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 9. Soit A, B et C trois matrices (le lecteur déterminera les formats nécessaires pour que les égalités aient un sens) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On peut alors écrire, sous réserve que les termes suivants aient un sens :

- i) $A(B + C) = AB + AC$.
- ii) $(A + B)C = AC + BC$.
- iii) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
- iv) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- v) $(AB)C = A(BC)$.

2.1.3 Cas des matrices carré

L'intérêt des matrices carré vient du fait que le produit est alors « interne » ; le produit de deux matrices carrées (de même taille, sinon il n'a pas de sens) est encore une matrice carré de même taille.

Proposition-Définition 10 (Matrice identité). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique matrice I_d qui est un élément neutre à droite pour le produit matriciel. C'est-à-dire une matrice I_d vérifiant

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MI_d = M.$$

Il existe également une unique matrice I_g qui est un élément neutre à gauche pour le produit matriciel. C'est-à-dire une matrice I_g vérifiant $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), I_g M = M$.

Ces deux matrices sont en fait les mêmes, on l'appelle la matrice identité et on la note I_n et on a :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On définit également les matrices diagonales et les matrices triangulaires.

Définition 11 (Matrices diagonales). Une matrice carrée $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite diagonale si $d_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Définition 12 (Matrices triangulaires). Les matrices triangulaires peuvent être inférieures ou supérieures.

- Une matrice carrée $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite triangulaire supérieure lorsque $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Une matrice carrée $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite triangulaire inférieure lorsque $t_{i,j} = 0$ dès que $i < j$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 13. Les matrices diagonales sont exactement les matrices qui sont à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures

Proposition 14 (Produit de matrices diagonales ou triangulaires). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, D_1, D_2 deux matrices

$$\text{diagonales, } D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \alpha D_1, D_1 + D_2 \text{ et}$$

$$D_1 D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix} \text{ sont des matrices diagonales.}$$

On dit que l'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n$ est stable par produit.

Soit T_1, T_2 deux matrices triangulaires supérieures et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha T_1, T_1 + T_2$ et $T_1 T_2$ sont des matrices triangulaires supérieures. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n^+$ est stable par produit, de même pour $\mathcal{T}_n^-$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

2.1.4 Matrices inverses

Définition 15. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est inversible si $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA = I_n$. On appelle groupe linéaire d'ordre n et on note $\text{GL}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Attention ! Il existe des matrices non nulles qui ne sont pas inversibles.

Exercice 16. Prouver que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Proposition 17 (unicité de l'inverse). Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, AM = BM \Leftrightarrow A = B$. Ainsi l'inverse d'une matrice (s'il existe) est unique et on le note M^{-1} .

On a également un lemme très utile qui dit que pour inverser une matrice, il suffit de trouver un inverse à gauche ou à droite.

Lemme 18 (Miracle de l'inversibilité des matrices carrées). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit A une autre matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AM = I_n$, alors M est inversible et $A = M^{-1}$.

De même si $MA = I_n$, alors M est inversible et $A = M^{-1}$.

Proposition 19. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.3 Détermination pratique de l'inverse par opérations élémentaires

Définition 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout couple $(i, j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2$, on appelle matrice élémentaire d'indices (i, j) et on note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls saufs celui en i -ème ligne et j -ème position qui vaut 1. C'est-à-dire que :

$$E_{i,j} = i \longrightarrow \begin{matrix} & & j \\ & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Remarque 29. Ces matrices s'appellent matrices élémentaires car elles permettent de décomposer toute matrice carrée de taille n comme une combinaison linéaire de ces matrices élémentaires. En outre, une telle décomposition est unique. Nous verrons tout ceci au chapitre sur les espaces vectoriels. Plus spécifiquement si A , alors on peut écrire :

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} A[i, j] E_{i,j}.$$

Ces matrices élémentaires permettent également de traduire les opérations élémentaires comme un produit matriciel. Explicitons ce que l'on veut dire. Nous avons d'abord besoin d'un lemme.

Lemme 30 (Multiplication à gauche par une matrice élémentaire). *Soit n et p deux entiers naturels non nuls fixés. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :*

$$E_{i,j}A = i \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ A[j, 1] & A[j, 2] & \dots & & A[j, p] \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que la i -ème ligne de la matrice $E_{i,j}A$ est la j -ème ligne de A et que les autres lignes sont nulles.

Corollaire 31. *Nous pouvons maintenant traduire chaque opérations élémentaires par la multiplication à gauche d'une certaine matrice. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on note $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ les lignes de A . Alors :*

- La permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $(I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j})$.
- La dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ correspond à la multiplication à gauche par $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
- La transvection $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $I_n + \alpha E_{i,j}$.

Proposition 32. *On reprend les notations précédentes. Lorsqu'on effectue une suite d'opérations élémentaires sur la matrice A , ceci revient à multiplier A à gauche par une matrice d'opérations M . La matrice M est alors inversible et si l'on souhaite trouver son expression, il suffit d'appliquer la même suite d'opérations élémentaires à la matrice identité. En particulier, cette matrice M ne dépend que de l'opération effectuée et pas de la matrice A .*