

Colles semaine 11

En bref

- Théorème de la bijection pour les fonctions réelles.
- Dérivabilité des bijections réciproques de fonctions réelles dérivables et strictement monotones.
- Application des résultats précédents pour l'étude de arcsin, arccos et arctan.
- Primitive de toute fraction rationnelle à dénominateur de degré 2. La démarche doit être guidée si le dénominateur est de degré strictement supérieur.
- Résolution de l'équation $z^2 = w$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- Résolution des équations complexes de degré 2.
- Relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2.
- Factorisation d'un polynôme connaissant une racine.
- Racines de l'unité et résolution de $z^n = re^{i\theta}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Liste de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Les étudiants sont maintenant (censés être) des experts de l'étude des suites implicites.
- Rappeler la définition précise de arcsinus (variante possible avec arccosinus), son domaine de dérivabilité et l'expression de sa dérivée. Prouver les deux derniers points à l'aide du théorème de dérivabilité des bijections réciproques.
- Rappeler la définition précise de arctangente. Prouver son imparité, sa dérivabilité et l'expression de sa dérivée.
- Calculer l'intégrale $\int_1^4 \frac{1}{t^2-2t+5} dt$.
- Résoudre l'équation $z^2 = -5 + 12i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. *On peut varier les valeurs numériques*
- Prouver la formule de résolution des équations de degré 2 par mise sous forme canonique.
- Prouver que $\forall z \in \mathbb{C}, z^n = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

Note aux colleurs

- Le fait que si un polynôme P admet une racine a , alors il est factorisable par $(x - a)$ est pour le moment réduit à l'état de constat expérimental. On cherche une factorisation, et on en trouve une. On n'essaye pas de prouver ce résultat théorique.
- Nous avons admis le fait qu'une équation polynomiale de degré $n \geqslant$ admettait au plus n racines distinctes et au moins une racine sur $\mathbb{C}$.
- On a mentionné la formule de Taylor polynomiale (uniquement en zéro) afin de prouver l'unicité des coefficients d'un polynômes. Mais sa maîtrise n'est pas (encore) un objectif majeur de la semaine.
- Certains étudiants confondant encore fonction P et image $P(x)$, je m'interdis pour le moment d'utiliser la notation X pour les polynômes.

En détail

Dérivation des bijections réciproques réelles et trigonométrie réciproque

Reprise du programme précédent

Équations polynomiales complexes

1 Prologue, rappels sur les polynômes

Nous commençons par rappeler ce qu'est un polynôme.

Définition 1. Soit P une application définie sur $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$. On dit que P est une *application polynomiale* ou un *polynôme* s'il existe un entier naturel n et un $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k. \quad (1)$$

Nous montrerons au chapitre sur les polynômes le lemme suivant :

Lemme 2 (degré). Soit P une application polynomiale, non constante nulle, alors il existe un et un unique entier naturel n et unique $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \\ \text{et } a_n \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Cet entier n s'appelle le *degré* de P et le complexe a_n s'appelle le *coefficient dominant* de P .

Par convention, le degré du polynôme constant nul vaut $-\infty$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n (incluant le polynôme nul).

Théorème 3 (principe d'identification des coefficients d'un polynôme). La suite des coefficients d'un polynôme est unique. Notamment, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} & \forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \forall (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \\ & \left(\forall z \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k z^k = \sum_{k=0}^n b_k z^k \right) \implies (\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = b_k). \end{aligned}$$

2 Le second degré

Une équation du second degré s'écrit nécessairement sous la forme $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ où (a, b, c) est un triplet de complexe fixés avec $a \neq 0$.

2.1 Calcul de racines carrées

Définition 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **racine carrée** de z tout nombre complexe Z tel que $Z^2 = z$.

Proposition 5. Le complexe 0 admet une unique racine carrée qui est 0. Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées qui sont opposées l'une de l'autre.

Remarque 6. Si a est un réel positif, on parle de **la** racine carrée de a pour désigner celle des deux racines qui est positive. Dans le cas où z est un nombre complexe, on ne dispose pas d'un tel moyen pour particulariser l'une des deux racines. Pour cette raison on dit **une** racine carrée de z et on s'interdit d'utiliser le symbole déterministe $\sqrt{}$ qui reste réservé aux réels positifs.

- Méthode 7** (Détermination de racine carré). 1. **Via la forme trigonométrique** : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ qui admet pour forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$. Alors les racines carrées de z sont : $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}e^{i(\pi+\frac{\theta}{2})}$.
2. **Via la forme algébrique** : Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On cherche $Z = X + iY$ avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Z^2 = z$. Alors, on en déduit :
- par égalité des parties réelles : $X^2 - Y^2 = \operatorname{Re}(z) = x$
 - par égalité des modules : $X^2 + Y^2 = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
 - par égalité des parties imaginaires : $2XY = \operatorname{Im}(z)$, en particulier XY est du même signe que y .

Pourquoi obtient-on toutes les racines carrées de z ?

2.2 Second degré général

Proposition 8 (Equation du second degré à coefficients complexes). Soient a , b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$(E) \quad az^2 + bz + c = 0$$

on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors,

- Si $\Delta \neq 0$, en notant δ une racine carrée de Δ , l'équation (E) admet les deux racines distinctes suivantes :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet pour racine double

$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Proposition 9. Si a , b et c sont réels et si z_1 est une racine de $az^2 + bz + c = 0$; alors $z_2 = \bar{z}_1$ est aussi une racine (pas nécessairement distincte) de l'équation.

2.3 Relation coefficients-racines

Proposition 10. Soient a , b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors,

z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Application 11. — Soient deux nombres complexes s et p fixés. Si l'on cherche deux complexes z_1 et z_2 tels que :

$$z_1 + z_2 = s \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = p$$

alors on peut dire que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation : $z^2 - sz + p = 0$.

En particulier, il existe toujours un couple de tel complexes et ce couple est unique à l'ordre des éléments près.

- Si on connaît une des solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (où a , b et c sont trois nombres complexes avec $a \neq 0$) , alors on peut facilement trouver l'autre.

3 Degré quelconque et racines n -ièmes

Comme pour le degré 2, avant de résoudre une équation générale de degré n , il est bon de commencer par résoudre l'équation $z^n = a$ pour un complexe fixé a . La situation devenant d'ailleurs légèrement plus délicate, on s'attardera en priorité sur le cas $a = 1$ avant d'étudier le cas général.

Définition 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un complexe fixé. On appelle *racine n -ème de a* tout complexe z vérifiant $z^n = a$.

On appelle également *racine n -ème de l'unité* tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.

3.1 Racines de l'unité

Notation 13. L'ensemble des racines n -ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Proposition 14. *Il existe exactement n racines de l'unité, ce sont les complexes*

$$w_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \quad \text{où } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right); k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right); k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

Proposition 15. *Soit n un entier au moins égal à 2. On a $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$. Plus explicitement, cela signifie que si l'on pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, alors on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

3.2 Racine n -ème d'un complexe quelconque

Proposition 16. *Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Posons $a = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*

i) *Le nombre complexe a admet exactement n racines n -ièmes, ce sont les*

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

ii) *Si z_0 est une racine n -ième particulière de a alors les racines n -ièmes de a sont les $z_0 w_k$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et où les w_k sont les racines n -ièmes de l'unité.*

L'ensemble des racines n -ièmes de a est donc $z_0 \mathbb{U}_n = \{z_0 w; w \in \mathbb{U}_n\}$.

iii) *Les images dans le plan des racines n -ièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés d'isobarycentre O .*

3.3 Équations polynomiales générales

Théorème 17 (De D'Alembert-Gauss, admis). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une équation polynomiale de degré n admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$ et au plus n racines distinctes.*