Colles semaine 13

En bref

— Équations différentielles normalisé d'ordre 1. Cas homogène, méthode de variation de la constante dans le cas d'un second membre.
— Étude sur des exemples de problèmes de raccord de solutions pour les équations différentielles d'ordre 1 non normalisées.
— Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy d'ordre 1
— Équations différentielles homogènes à coefficients constants d'ordre 2.
— Introduction à l'analyse asymptotique : notation $u_n = o(w_n)$; $u_n = O(w_n)$ et $u_n \sim w_n$.
— Traduction des résultats de croissances comparées connus dans ce nouveau formalisme.
— Extension pour les fonctions.
— Équivalence entre la dérivabilité d'une fonction et l'existence d'un développement limité d'ordre 1.

Liste de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.
— Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
— Résoudre $(1-\mathrm{i})y'' - 4y' + (1+3\mathrm{i})y = 0$.
— Déterminer l'unique fonction à valeurs réelle solution de $\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 2 \end{cases}$.
— Montrer que $q^n \underset{n\to\infty}{=} o(n!)$ pour un réel q. Coter sans preuve les autres résultats de croissances comparés en $n \to \infty$.
— Montrer que pour deux suites u et w , alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \iff u_n \underset{n\to\infty}{=} w_n + o(w_n)$.
— Montrer que si u et w sont deux suites strictement positives **de limite nulle**, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \implies \ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(w_n)$. Citer un contre-exemple si l'on enlève l'hypothèse de limite nulle. S'assurer que l'étudiant a bien compris que cette propriété doit être redémontrée s'il souhaite l'utiliser sur une copie.
— Pour une fonction f, montrer que f est dérivable en a si et seulement si $\exists \alpha \in \mathbb{C},\ f(a+t) \underset{t\to 0}{=} f(a) + \alpha t + o(t)$.

Note aux colleurs

— Les étudiants sont maintenant capables (en théorie) de résoudre en autonomie toute équation différe,ntielle d'ordre 2 à coefficients constants lorsque le second membre est de type $P(t)\exp(\alpha t)$ pour une constante α et un polynôme P.
— Nous n'avons pas encore vu la notion de développement limité. On s'est contenté d'écrire $f(a+t) \underset{t\to 0}{=} f(a) + tf'(a) + o(t)$ pour une fonction dérivable en a.
— En conséquence du point précédent, on se contentera pour l'analyse asymptotique de questions très élémentaires visant à vérifier que l'étudiant maîtrise les règles de manipulations de cette notation délicate.

En détail

1 Équations différentielles

Reprise du programme précédent

2 Comparaison asymptotique des suites

Définition 1 (Propriétés vérifiées à partir d'un certain rang)**.** Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat (c'est-à-dire une affirmation dont la valeur de vérité dépend d'une variable n) d'une variable entière. On dit que $\mathcal{P}(n)$ est vrai *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N,\ \mathcal{P}(n)$.

2.1 Suites négligeables et dominées

Définition 2. Soit u une suite et v une suite asymptotiquement non nulle, c'est-à-dire que pour n assez grand $v_n \neq 0$. Alors on peut définir à partir d'un certain rang la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ et alors :

i) on dit que $u_n = O(v_n)$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

ii) on dit que $u_n = o(v_n)$ si la suite $n \mapsto \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.

Remarque 3. Dans les notations « $u_n = o(v_n)$ ou « $u_n = o(v_n)$ », la variable n est muette.

Proposition 4 (Dominations classiques)**.** *Nous traduisons les résultats classiques de croissances comparées à l'aide de cette nouvelle notation. Soit α et β deux réels, alors :*

i) *si* $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$,

ii) *si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et si* $\beta > 1$, $n^\alpha = o(\beta^n)$,

iii) *si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et si* $-1 < \beta < 1$, $\beta^n = o(n^\alpha)$,

iv) *si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et si* $\beta > 0$, $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$,

v) *si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et si* $\beta < 0$, $n^\beta = o((\ln n)^\alpha)$,

vi) *si* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^n = o(n!)$

vii) $n! = o(n^n)$.

2.2 Suites équivalentes

Définition 5. Soit u une suite et v une suite asymptotiquement non nulle. On dit que $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1. Et alors u est également asymptotiquement non nulle.

Remarque 6. La relation "être équivalente à" est symétrique, c'est-à-dire que $u_n \sim v_n$ si et seulement si $v_n \sim u_n$.

Proposition 7 (Lien entre suites équivalentes et suites négligeables)**.** *Soit u et v deux suites :*

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(u_n) \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

2.3 Opérations sur les relations de comparaison

Lemme 8. *La relation de négligeabilité est transitive, c'est-à-dire :*

$$\begin{gathered}
u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = O(w_n) \Longrightarrow u_n = O(w_n) \\
u_n = o(v_n) \text{ et } v_n = O(w_n) \Longrightarrow u_n = o(w_n) \\
u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = o(w_n) \Longrightarrow u_n = o(w_n) \\
u_n = o(v_n) \text{ et } v_n = o(w_n) \Longrightarrow u_n = o(w_n)
\end{gathered}$$

Proposition 9 (Opérations sur les équivalents). *Soit u, v, w et x quatre suites réelles. Alors :*

i) $\big(u_n \sim v_n \text{ et } x_n \sim w_n\big) \Longrightarrow u_n x_n \sim v_n w_n$;

ii) $\big(u_n \sim v_n \text{ et } x_n \sim w_n\big) \Longrightarrow \dfrac{u_n}{x_n} \sim \dfrac{v_n}{w_n}$;

iii) si les suites u_n et v_n sont positives ; pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $u_n \sim v_n \Longrightarrow {u_n}^{\alpha} \sim {v_n}^{\alpha}$.

Proposition 10 (Opérations sur les dominations). *Soit u, v , u' et v' quatre suites.*

$$u_n = O(v_n) \text{ et } w_n = O(v_n) \Longrightarrow u_n + w_n = O(v_n)$$
$$u_n = O(v_n) \text{ et } u'_n = O(v'_n) \Longrightarrow u_n u'_n = O(v_n v'_n)$$
$$u_n = o(v_n) \text{ et } x_n = O(w_n) \Longrightarrow u_n x_n = o(v_n w_n)$$
$$\big(u_n = o(v_n) \text{ et } u'_n = o(v_n)\big) \Longrightarrow u_n + u'_n = o(v_n)$$
$$\big(u_n = o(v_n) \text{ et } u'_n = O(v'_n)\big) \Longrightarrow u_n u'_n = o(v_n v'_n)$$

3 Généralisation aux fonctions

Dans tout ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On va ici étudier le comportement local de ces fonctions au voisinage d'un point ou d'une extrémité a de I, ainsi, a peut être réel ou $a = \pm\infty$. Dans les définitions qui suivent, on suppose que g ne s'annule pas sur I, sauf éventuellement en a.

3.1 Définitions

Définition 11. Soit f et g deux fonctions :

i) On dit que f est dominée par g au voisinage de a si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note alors

ii) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si $\frac{f}{g}$ admet une limite nulle en a. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$ et on dit que "f est un petit o de g au voisinage de a".

iii) On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si $\frac{f}{g}$ admet pour limite 1 en a. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ et on dit que "f est équivalente à g au voisinage de a".

Proposition 12. *Soient de plus h et k deux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur I privé de a. Alors,*

i) si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k$, alors, $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)k(x)$ (compatibilité avec le produit) *;*

ii) si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$, alors, $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to aa}{\sim} \frac{g(x)}{k(x)}$ (compatibilité avec le quotient) *;*

iii) si, sur I privé de a, ces fonctions sont strictement positives, alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow f(x)^{\alpha} \underset{x\to a}{\sim} g(x)^{\alpha}.$$

3.2 Séquentialisation des relations fonctionnelles

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de composition de limites.

Théorème 13 (Séquentialisation d'une relation de domination/négligeabilité/équivalence fonctionnelle). *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage d'un même réel a.*

Soit également une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ce même réel a. Alors on peut écrire les implications suivantes :

i) $\left(f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \text{ et } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = a\right) \implies f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} o(g(u_n)).$

ii) $\left(f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \text{ et } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = a\right) \implies f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} O(g(u_n)).$

iii) $\left(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ et } \lim\limits_{n\to\infty} u_n = a\right) \implies f(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} g(u_n).$

3.3 Croissances comparées

Dans toute cette partie, a et b désignent des réels. On fera attention que les comparaisons sont souvent très différentes en l'infini et en zéro.

Proposition 14 (Fonctions puissances)**.** *Pour deux réels a et b, en supposant $a < b$*

i) $x^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b)$.

ii) $x^b \underset{x\to 0}{=} o(x^a)$.

Corollaire 15 (Cas des polynômes)**.** *Si $(a_p, \dots, a_n)$ sont des réels vérifiant $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$ et si P est un polynôme s'écrivant $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k x^k$, alors*

$P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$ et $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$.

Proposition 16 (Fonctions logarithmes et puissances)**.** *Pour deux réels a et b **strictement positifs** (le lecteur adaptera les cas négatifs à l'aide du passage à l'inverse, cf. proposition 12) :*

i) $(\ln(x))^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b)$.

ii) $x^b \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{|\ln x|^a}\right)$.

Proposition 17 (Fonctions géométrique et polynômes)**.** *Pour a et q deux réels strictement positifs :*

i) Si $q > 1$, alors $x^a \underset{x\to+\infty}{=} o\left(q^x\right)$.

ii) Si $0 \leqslant q < 1$, alors $q^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^a}\right)$.

Proposition 18 (La suite des factorielles)**.** *Pour un réel q vérifiant $|q| \geqslant 1$:*

i) $q^n \underset{n\to\infty}{=} o\left(n!\right)$.

ii) $n! \underset{n\to\infty}{=} o\left(n^n\right)$.

4 Réinterprétation de la dérivabilité

Proposition 19 (Développements limités d'ordre 1)**.** *Si f est une fonction dérivable en a, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + xf'(a) + o(x)$. Autrement dit, si $f'(a) \neq 0$, alors : $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.*

Proposition 20 (Réciproque)**.** *Si f est une fonction définie sur un voisinage de a et s'il existe une constante K telle que $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + Kx + o(x)$; alors f est dérivable en a et $f'(a) = K$.*

Application 21. Les cas particuliers suivants sont fondamentaux et doivent être connus par cœur.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x) \\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{\sim} x \\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{\sim} \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \\
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x) \\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + o(x) \qquad \text{pour une constante } \alpha.
\end{aligned}$$