Colles semaine 14

En bref

— Introduction à l'analyse asymptotique : notation $u_n = o(w_n)$; $u_n = O(w_n)$ et $u_n \sim w_n$.
— Traduction des résultats de croissances comparées connus dans ce nouveau formalisme.
— Extension pour les fonctions.
— Équivalence entre la dérivabilité d'une fonction et l'existence d'un développement limité d'ordre 1.
— Formules de Taylor-Young.
— Calculs pratiques de développements limités par produit, composition, factorisation, primitives, etc.
— Exemples de développements asymptotiques.

Liste de questions de cours

Cette semaine, en guise de questions de cours, chaque étudiant citera deux développements limités (choix du colleur) parmi ceux à connaître :
sin, cos, exp, ch, sh, $\frac{1}{1\pm x}$, $(1+x)^\alpha$, arctan à l'ordre quelconque.
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 et tan à l'ordre 4.
La plus grande sévérité sera de mise en cas d'erreurs sur les développements limités.

Note aux colleurs

— J'ai encore à peine eu le temps de commenter la position relative d'une courbe et de sa tangente en expliquant le rôle du signe du terme suivant le terme linéaire dans le développement limité.

En détail

Analyse asymptotique

Reprise du programme précédent plus développements limités à tout ordre :

0.1 Formule de Taylor

Théorème 1 (Formule de Taylor-Young). *Soit a un réel et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I d'intérieur non vide contenant 0. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(a+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x^n).$$

Application 2. Voici une série de développement limités en zéro classiques et à connaître :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)\ , \qquad (\text{pour } \alpha \in \mathbb{R})\ ,
\end{aligned}$$

en particulier :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} x^n + o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)2^{2n}} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} x^n + o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

0.1.1 Autres considérations pratiques

Proposition 3. *Si une fonction est paire (resp. impaire) alors la partie régulière de son développement limité en zéro est un polynôme pair (resp. impair). C'est-à-dire que ce polynôme ne contient que des monômes de degré pair (resp. impair).*

Corollaire 4. *Si f admet un développements limités de type $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} a_k x^k + o(x^{2n+2})$, alors les parties paires et impaires de f admettent des développements limités donnés par :*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) + f(-x)}{2} &\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \\
\frac{f(x) - f(-x)}{2} &\underset{x\to 0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

0.2 Manipulations de développements limités

Proposition 5 (On peut primitiver les DL)**.** *Soit f admettant un développement limité d'ordre n en zéro donné par $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.*

Alors toute primitive de de f notée F admet également un développement limité ***d'ordre*** *$n+1$ donné par :*

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Attention ! Ne pas oublier le terme constant $F(0)$.

Proposition 6 (Application d'un Dl en x^p)**.** *Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 de type : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.*

Alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a un développement limité ***d'ordre*** *np de $f(x^p)$ donné par :*

$$f(x^p) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{kp} + o(x^{np}).$$

Application 7. On en déduit immédiatement le développement limité d'arctangente (en primitivant $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$)

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

En raisonnant par identification des coefficients, on trouve également un développement de tangente à la précision de son choix. L'ordre 4 est à connaître :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Attention ! On ne peut pas en général dériver un DL

0.3 Méthode pour calculer un développement limité de composées et de produit

.

Méthode 8 (Produit de DL)**.** Si f et g admettent chacune en zéro un développements limités d'ordre n de type $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + x^n$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + x^n$; alors l'égalité $f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + x^n$ est correcte mais en général absolument stupide !

Pour avoir la version utile de cette égalité, il convient de tronquer tous les termes de degré supérieur ou égal à) $n+1$ dans le produit de polynômes PQ.

Méthode 9 (Composition de DL)**.** Supposons que l'on veuille calculer un développement limité de la fonction $(f \circ g)$ au voisinage de zéro.

i) **On vérifie que** $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Sinon, si la limite est finie égale à ℓ, on pose alors $\tilde{g} = g - \ell$ qui a bien une limite nulle et on se ramène à cette hypothèse. Si g n'a pas de limite finie en 0, on est probablement en train de faire n'importe quoi.

ii) On suppose donc dorénavant que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

iii) On cherche un entier $p \geqslant 1$ tel que $g(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^p)$. On en déduira que $o\Big(g(x)^n\Big) = o(x^{np})$ pour tout entier n.

iv) On choisit alors l'entier n tel que $o(x^{np})$ donne la précision voulue. Par exemple, pour avoir un développement d'ordre q de $f \circ g$, on choisira $n = \frac{q}{p}$ arrondi à l'entier supérieur.

v) On écrit alors un développement limité de f de type $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ pour ce n choisi.

vi) On calcule un développement limité à l'ordre voulu de chaque terme $g(x)^k$ apparaissant dans la somme précédente. On élude donc tous les termes superflus.

vii) On recombine le tout et on conclut.