Colles semaine 14

En bref

- Introduction à l'analyse asymptotique : notation $u_n = o(w_n)$; $u_n = O(w_n)$ et $u_n \sim w_n$.
- Traduction des résultats de croissances comparées connus dans ce nouveau formalisme.
- Extension pour les fonctions.
- Équivalence entre la dérivabilité d'une fonction et l'existence d'un développement limité d'ordre 1.
- Formules de Taylor-Young.
- Calculs pratiques de développements limités par produit, composition, factorisation, primitives, etc.
- Exemples de développements asymptotiques.
- Exemples d'études asymptotiques de suite implicite ou de suite définies par des intégrales.
- Quelques propriétés du calcul réel : bornes supérieures et partie entière.
- Début du chapitre sur les suites : suites arithmético-géométriques.

Liste de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Citer sans preuve un développement à tout ordre de $\frac{1}{1+x}$ puis en déduire avec preuve un développement limité de $\ln(1+x)$ et de $\arctan(x)$.
- Déterminer en le justifiant un développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 6. La méthode vue en cours est par intégration de $1+\tan^2$. Mais les étudiants ont comme DM facultatifs de le déterminer par 4 autres méthodes, il pourront choisir la leur en colle.
- Déterminer l'expression de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$ *On pourra changer les valeurs numériques.*
- Montrer grâce à un équivalent que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{\operatorname{sh}(x)}$ admet un prolongement continu en zéro. Vérifier grâce aux développements limités que ce prolongement est encore de classe $\mathcal{C}^1$.

Note aux colleurs

- Encore une semaine avec des développements limités au programme. Mais vu son importance dans le programme, ce n'est pas superflu.
- Si on veut varier les exercices, des études asymptotiques de suites implicites ou des études de régularité de prolongement de fonction sont en parfaite concordance avec les récents exos vus en TD.
- Pour les bons étudiants, on pourra terminer la colle avec un exo impliquant des bornes supérieures.

En détail

Analyse asymptotique et développement limités

Reprise du programme précédent

1 Valeurs absolues

Normalement cette notion est bien connue du lecteur mais donnons quelques brefs rappels.

1.1 Définition et rappels

Définition 1. Pour un réel x, on définit la valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 2. *La fonction valeur absolue :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ *est positive et continue sur* $\mathbb{R}$ *; dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *mais non dérivable en zéro ; strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

Lemme 3. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \sqrt{x^2}$

1.2 Variations autour de l'inégalité triangulaire

Lemme 4 (Inégalité triangulaire, version réelle)**.** *Pour tout couple* (x, y) *de réels, on a* $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ *avec égalité si et seulement si* x *et* y *sont de même signe.*

Proposition 5 (Inégalité triangulaire sur les sommes)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Alors*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

On peut également donner cette inégalité sur les sommes continues, c'est-à-dire les intégrales.

Proposition 6 (Inégalité triangulaire sur les intégrales)**.** *Soit* $[a\,;\,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur* $[a\,;\,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.. *Alors :*

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Précisons d'ailleurs que cette inégalité reste valable pour les fonctions à valeurs complexes (mais toujours continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$) mais que la preuve en devient hors-programme.

2 Ensembles majorés, minorés, bornés

Définition 7 (Majorant, minorant)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x un réel.
- On dit que x est un majorant de A si $\forall a \in A,\ a \leqslant x$.
- On dit que x est un minorant de A si $\forall a \in A,\ x \leqslant a$.

Définition 8 (Ensembles majorés , minorés, bornés)**.** Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dit majoré s'il admet au moins un (et alors une infinité de) majorant ; il est dit minoré s'il admet au moins un (et alors une infinité de) minorant ; il est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.

Définition 9 (Maximum, minimum)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et m un réel.
- On dit que m est un maximum de A si m est un majorant de A et que $m \in A$.

— On dit que m est un minimum de A si m est un minorant de A et que $m \in A$.

Lemme 10. *Tout minimum d'un ensemble est un minorant de cet ensemble mais la réciproque est fausse en général*

Théorème 11. *Un minimum (ou un maximum) s'il existe est unique. On peut donc parler* du *minimum d'un ensemble A (en cas d'existence) que l'on note* $\min(A)$.

Théorème 12. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.*

Théorème 13. *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{Z}$ admet :*
— *un minimum s'il est minoré,*
— *un maximum s'il est majoré.*

Théorème 14. *Tout sous-ensemble* ***fini*** *et non vide de $\mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum.*

2.1 Une application, la partie entière

Proposition-Définition 15 (Partie entière)**.** *Soit x un réel, l'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ est bien évidemment majoré par x, il admet donc un maximum que l'on appelle partie entière de x et que l'on note $\lfloor x \rfloor$.*

Il résulte de cette définition les caractérisations suivantes :

Proposition 16. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes*

$$k = \lfloor x \rfloor \iff \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } x - 1 < k \leqslant x \end{cases} \iff \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } k \leqslant x \leqslant k+1 \end{cases}.$$

Ou encore un autre point de vue, si on préfère :

Proposition 17 (Décomposition en partie entière et fractionnaire)**.** *Soit x un réel. Alors, il existe un unique couple $(k, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } \varepsilon \in [0\,;1[\\ \text{et } x = k + \varepsilon \end{cases}$. L'entier k de ce couple est alors la partie entière. Le réel ε, s'appelle parfois* partie fractionnaire *de x.*

Proposition 18. *La fonction $E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ est :*

i) croissante,
ii) continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
iii) discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$ (mais continue à droite en ces points).

3 Bornes supérieures et inférieures

3.1 Définitions et exemples

Définition 19 (Bornes supérieures et inférieures)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et m un réel. S'il existe, on appelle borne supérieure de A le plus petit majorant de A ; c'est-à-dire le minimum de l'ensemble des majorants de A. On appelle de même borne inférieure de A, le plus grand minorant de A, s'il existe.

Remarque 20. Dans le cas où l'ensemble A n'est pas majoré, le programme recommande la notation $\sup(A) = +\infty$. De même, si A n'est pas minoré, alors on notera $\inf(A) = -\infty$.

Lemme 21. *Un ensemble non majoré n'admet pas de borne supérieure. De plus, la borne supérieure de A si elle existe est unique et se note* $\sup(A)$.

Proposition 22. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors il admet aussi une borne supérieure et* $\max(A) = \sup(A)$.

Lemme 23 (Réciproque partielle de la proposition précédente)**.** *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure. Alors, deux cas peuvent se présenter :*

i) Soit $\sup(A)$ *appartient à l'ensemble A, et dans ce cas,* $\sup(A)$ *est également le maximum de A.*

ii) Soit $\sup(A)$ *n'appartient pas à l'ensemble A, et dans ce cas, A n'admet pas de maximum.*

Théorème 24 (Théorème de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)**.** *Tout sous-ensemble* non-vide et majoré *de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. Tout sous-ensemble* non-vide et minoré *de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

3.2 Recherche pratique

Proposition 25 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et s un réel. Il est équivalent de dire que s est la borne supérieure de A et :*

i) s est un majorant de A,

ii) et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a$.

Méthode 26. Soit A une sous-ensemble (non vide, sinon c'est vraiment évident) de $\mathbb{R}$. Pour chercher la borne supérieure, on peut employer l'algorithme suivant :

i) On commence par chercher un majorant.
   - Si l'ensemble n'est pas majoré, alors A n'admet pas de borne supérieure réelle, on notera $\sup(A) = +\infty$.
   - Si l'ensemble admet un majorant, alors il admet une borne supérieure réelle finie par le théorème de la borne supérieure. On poursuit alors l'algorithme

ii) On détermine explicitement un majorant de A que l'on note M. On se demande ensuite si M est un élément de A.
   - Si $M \in A$, alors il s'agit du maximum de A et donc de la borne supérieure de A. On a terminé.
   - Si $M \notin A$, on essaie alors de prouver que $M = \sup(A)$ en appliquant la caractérisation [1] en epsilon.
   - Si on échoue à prouver ceci, alors il est probable que M ne soit pas la borne supérieure. Dans ce cas, on cherche un autre majorant M' strictement inférieur à M. On reprend alors à l'algorithme à l'étape numéro ii.

1. ou caractérisation séquentielle lorsqu'on l'aura vu ; cela est légèrement plus simple en pratique.