Colles semaine 16

En bref

- Bornes supérieures et inférieures. Partie entière
- Suites arithmético-géométrique.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Définition des limites de suites (réelles et complexes).
- Propriété algébrique des limites.
- Cas des sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Montrer que la limite d'une suite si elle existe est unique (On se limitera au cas des limites finies).
- Montrer que les suites convergentes sont bornées.
- Citer et montrer la propriété de passage à la limite des inégalités.
- Montrer que si une suite u converge vers $\ell > 0$; alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.
- Montrer qu'une suite u converge si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Note aux colleurs

- Je n'ai pas encore traité d'exemple de suites récurrentes d'ordre 2 avec second membre. Mais on peut très bien poser de telles questions en guidant la démarche.
- En ce qui concerne la définition formelle de suite, il est difficile de trouver des exercices à la portée des étudiants aussi tôt dans le chapitre. C'est pourquoi on n'hésitera pas à interroger encore sur l'analyse asymptotique.

En détail

1 Suites récurrentes linéaires

1.1 Cas des suites récurrentes d'ordre 1

On se donne deux réels a et b fixés et on s'intéresse à une suite u vérifiant l'équation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \tag{E_1}$$

— Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique.
— Si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique.
— Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on dit que c'est une suite arithmético-géométrique et on utilise le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit u une suite vérifiant (E_1) avec $a \neq 1$. Alors il existe une unique valeur de α telle que la suite $w := (u - \alpha)$ soit une suite géométrique de raison a. De plus α est l'unique point fixe de la relation de récurrence (E_1). C'est-à-dire que $\alpha = a\alpha + b$.*

1.2 Cas des suites récurrentes d'ordre 2

On se donne trois scalaires (complexes ou réels) a, b et c fixés avec $a \neq 0$ et on s'intéresse à une suite u vérifiant l'équation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \tag{E_2}$$

On notera $\mathcal{E}_{a,b,c}$ l'ensemble des suites vérifiant cette relation.

Lemme 2 (Stabilité par combinaison linéaire)**.** *L'ensemble $\mathcal{E}_{a,b,c}$ est stable par combinaison linéaire. C'est-à-dire que pour toutes suites $u \in \mathcal{E}_{a,b,c}$ et $v \in \mathcal{E}_{a,b,c}$, on a :*

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,\ (\alpha u + \beta v) \in \mathcal{E}_{a,b,c}.$$

Lemme 3 (La suite u est déterminée par ses deux premiers termes)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une et une unique suite u vérifiant les trois conditions suivantes :* $\begin{cases} u \in \mathcal{E}_{a,b,c} \\ u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \end{cases}$.

Théorème 4 (Résolution de E_2, version complexe)**.** *On appelle équation caractéristique de E_2, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On suppose également que b et c ne sont pas simultanément nul (c'est un cas particulier légèrement problématique.)*

— *Si l'équation caractéristique admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ distinctes, notées r_1 et r_2 (ce qui correspond donc au cas où $\Delta \neq 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ (\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

— *Si l'équation caractéristique admet une solution et une seule dans $\mathbb{C}$, notée r_0 (ce qui revient à $\Delta = 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ (\lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Théorème 5 (Résolution de E_2, version réelle)**.** *On suppose que a, b et c sont **réels** avec $a \neq 0$ et on s'intéresse aux suites réelles de $\mathcal{E}_{a,b,c}$. On appelle équation caractéristique de E_2, l'équation $ar^2+br+c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{R}$. On note $\Delta = b^2-4ac$. On suppose également que b et c ne sont pas simultanément nul (c'est un cas particulier légèrement problématique.)*

— *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes, notées r_1 et r_2 (ce qui correspond donc au cas où $\Delta > 0$), alors,*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{ (\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

— *Si l'équation caractéristique admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$, notée r_0 (ce qui revient à $\Delta = 0$), alors,*
$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(\lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
— *Si l'équation caractéristique n'a pas de solution réelle (c'est-à-dire $\Delta < 0$), alors, en notant $r = \rho e^{i\theta}$ une des deux solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique (avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$) on a :*

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(\rho^n(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque 6. Bien sûr toute suite réelle peut être vue comme une suite complexe. On peut donc utiliser la résolution en version complexe, puis extraire parmi les solutions les suites qui sont à valeurs réelles. Ceci peut demander quelques calculs et réflexions non immédiates. Aussi est-il utile de connaître directement la formule précédente donnant tout de suite les solutions réelles.

2 Limites de suites

2.1 Suites convergentes

2.1.1 Définition formelle de limite

Définition 7 (Convergence d'une suite vers un réel)**.** On dit qu'une suite réelle u converge vers un réel ℓ ou encore qu'elle admet ℓ pour limite si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon. \qquad (\mathcal{P}_{\lim})$$

On note alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

Attention ! La question de l'existence d'une limite pour une suite donnée est, en générale délicate. On n'emploiera donc jamais la notation $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ avant d'avoir prouvé ou supposé que cette limite existe.

Définition 8. Soit $\mathcal{P}(x)$ un prédicat, on dit que la suite u vérifie $\mathcal{P}(u_n)$ à partir d'un certain rang (parfois abrégé en APCR) s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \implies \mathcal{P}(u_n)$. Autrement dit la propriété $\mathcal{P}(u_n)$ est vraie pour tous les entiers n sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux. On comprendra donc que, dans cette écriture, la variable n est encore une fois muette

Lemme 9 (Traduction de la définition de limite)**.** *Soit u une suite et ℓ un réel. Alors la suite u converge vers ℓ si et seulement si pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ, les réels u_n appartiennent à I à partir d'un certain rang.*

2.1.2 Quelques conséquences théoriques

Voici une liste de cinq propriétés qui se montrent à partir de la définitions formelle de limite. Vous devez savoir faire cela et cela est une excellente illustration du genre de preuves que l'on peut exiger de vous.

Proposition 10. *Si une suite réelle converge vers un réel, alors elle est bornée.*

Proposition 11. *Si une suite converge vers une limite, alors cette limite est unique.*

Proposition 12. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Si une suite u converge vers un réel $\ell > a$, alors à partir d'un certain rang $u_n \geqslant 0$.*

Remarque 13. Il est crucial dans la proposition précédente que ℓ soit **strictement supérieur** à a. Cherchez un contre-exemple lorsque $\ell = a$.

Proposition 14 (Passage à la limite des inégalités)**.** *Soit a un réel et u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < a$. Alors, si la suite u converge vers ℓ, on a l'inégalité* **large** *suivante : $\ell \leqslant a$.*

Proposition 15 (Caractérisation de la convergence par les sous-suites de rang pair et impair). *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.*

Un étudiant de PTSI doit savoir démontrer les propriétés 10 à 15.

Remarque 16. La proposition 15 peut également être utilisé pour prouver la divergence d'une suite par contraposition. Par exemple, il est aisé de montrer avec cette proposition que la suite $(-1)^n_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2.2 Limites infinies pour les suites réelles

2.2.1 Définitions

Définition 17 (Limites infinies). On dit qu'une suite réelle u admet pour limite $+\infty$ si :

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N)\Rightarrow u_n\geqslant A.$$

On dit qu'une suite u admet pour limite $-\infty$ si :

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N)\Rightarrow u_n\leqslant A.$$

Remarque 18. La terminologie de « suites convergentes » est réservée à celles qui admettent des limites finies. Les suites admettant des limites infinies sont dites divergentes, tout comme celles qui n'admettent pas de limites.

2.2.2 Propriétés élémentaires

Nous reprenons les propriétés 10 à 15 et nous les généralisons au cas des limites éventuellement infinies.

Proposition 19. *Si une suite réelle admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.*

Proposition 20. *Soit u une suite admettant $+\infty$ pour limite. Alors u est minorée et n'est pas majorée. De même si u admet $-\infty$ pour limite, alors elle est majorée mais pas minorée.*

Thèmes de réflexions 21. Peut-on trouver une suite u qui n'est pas majorée et qui ne tend pas vers $+\infty$? Qu'en déduire quant à la réciproque de la proposition précédente ?

Proposition 22. *Si une suite u tend vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang $u_n\geqslant 0$.*

Proposition 23 (Passage à la limite des inégalités). *Soit a un réel et u une suite vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, u_n<a$. On suppose également que la suite u admette une limite ℓ (finie ou infinie) ; alors, ou bien $\ell=-\infty$ ou bien ℓ est un réel fini vérifiant : $\ell\leqslant a$.*

Proposition 24 (Caractérisation de la limite par les sous-suites de rang pair et impair). *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite commune.*

2.3 Règles de calculs de limites

2.3.1 Quelques limites connues

Le cours de Terminale nous donne plusieurs résultats de limites.

Proposition 25. *Les limites suivantes sont des résultats à connaître.*

i) *Pour tout* $\alpha>0$, $n^\alpha\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$.

ii) *Pour tout* $\beta<0$, $n^\beta\xrightarrow{n\to\infty}0$.

iii) $\mathrm{e}^n\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$ *et* $\mathrm{e}^{-n}\xrightarrow{n\to\infty}0$.

iv) $\ln(n)\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$

v) *Pour a un réel fixé, la suite de terme général a^n :*
- *diverge vers $+\infty$ si $a>1$;*
- *converge vers 1 si $a=1$;*
- *converge vers 0 si $a\in\,]-1\,;1[$;*
- *n'a pas de limite si $a\leqslant -1$.*

2.3.2 Sommes et produits

Proposition 26 (Sommes de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite $u+v$.*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

Proposition 27 (Produit de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite uv.*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 28 (Quotient de limites). *Soit u et v deux suites admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 finies ou infinies. Le tableau suivant résume ce que l'on peut dire de la limite de la suite $\frac{u}{v}$. On supposera bien sûr que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.*

	$\ell_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell_1 = 0^+$	$\ell_1 = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}_-^*$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0^+$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = 0^-$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = +\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	*F.I.*	*F.I.*
$\ell_2 = -\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	*F.I.*	*F.I.*

Attention ! La notation 0^+ veut dire que la suite converge vers zéro tout en restant positive à partir d'un certain rang. En règle générale si le dénominateur tend vers 0 sans que l'on puisse déterminer son signe et que le numérateur a une limite non-nulle, alors on a affaire à une forme indéterminée. Le quotient peut n'avoir aucune limite dans ce cas ! Exemple de $\frac{1}{(-1)^n \mathrm{e}^{-n}}$.

2.4 Brève extension aux suites complexes

Définition 29. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite z converge si la suite réelle $(|z_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque 30. Il n'existe pas de notion de limite infinie pour les suites complexes.

Proposition 31 (Caractérisation de la convergence par les parties réelles et imaginaires). *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Cette suite converge si et seulement si chacune des suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.*

On rappelle la définition des suites complexes bornées.

Définition 32. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit qu'elle est bornée si la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Lemme 33. *Si une suite (z_n) converge vers un complexe ℓ, alors $|z_n| \xrightarrow{n\to\infty} |\ell|$. La réciproque est fausse en général.*

Thèmes de réflexions 34. Cherchons un contre-exemple qui invalide la réciproque du lemme précédent.

Exemple 35 (Suites géométriques complexes)**.** Pour tout complexe q fixé, la suite complexe de terme général $u_n = q^n$:

— converge vers 0 si $|q| < 1$;
— converge vers 1 si $q = 1$;
— n'a pas de limite et reste bornée si $|q| = 1$ et $q \neq 1$; (Ce point est plus délicat à prouver que le reste).
— n'a pas de limite et diverge en module (c'est-à-dire $|u_n| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$) si $|q| > 1$.

Thèmes de réflexions 36. Cherchons une valeur q de module 1 pour laquelle on sait prouver que la suite de terme général q^n diverge.