Colles semaine 17

En bref

- Suites arithmético-géométrique.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Définition des limites de suites (réelles et complexes).
- Propriété algébrique des limites.
- Propriétés prouvant la convergence : suites adjacentes, théorème de limite monotone et théorème des gendarmes.
- Cas des sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
- Exemples d'études de suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$:
  - Illustration de l'intérêt de la recherche d'intervalle stable par f.
  - Illustration de l'intérêt de l'hypothèse de croissance de f permettant de prouver la monotonie de u.
  - Illustration de l'intérêt d'étudier le signe de $f(x) - x$ pour étudier la monotonie de u.
  - Illustration de l'intérêt d'étudier séparément (u_{2n}) et (u_{2n+1}) lorsque f est décroissante sur un intervalle stable.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Montrer que la limite d'une suite si elle existe est unique (On se limitera au cas des limites finies).
- Montrer que les suites convergentes sont bornées.
- Citer et montrer la propriété de passage à la limite des inégalités.
- Montrer que si une suite u converge vers $\ell > 0$; alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.
- Montrer qu'une suite u converge si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
- Citer et prouver le théorème des gendarmes.
- Définir la notion de suites adjacentes et prouver que deux suites adjacentes sont convergentes.

Note aux colleurs

- Concernant les suites récurrentes, le seul résultat au programme est celui affirmant que si u converge vers ℓ, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f. Tout le reste doit être redémontré. C'est pourquoi on veillera à guider suffisamment l'énoncé. Néanmoins on a déjà passé pas mal de temps à détailler toutes les méthodes possibles.
- À partir de cette semaine et jusqu'à la fin de l'annnée, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.

En détail

1 Suites récurrentes linéaires

Reprise du programme précédent

2 Limites de suites

Reprise du programme précédent.

3 Prouver l'existence de limites

3.1 Utilisation de la monotonie pour les suites réelles

Théorème 1 (Théorème de limite monotone). *Soit u une suite croissante de réels. Alors la suite u admet une limite. De plus :*
- *Soit la suite u est majorée et alors elle converge vers une limite finie.*
- *Soit la suite u n'est pas majorée et alors sa limite vaut $+\infty$.*

Exercice 2. Adapter ce théorème au cas des suites décroissantes.

Ce théorème (ou plutôt sa preuve) a en plus une conséquence très utile pour la détermination des bornes supérieures.

Application 3 (Caractérisation séquentielle des bornes supérieures). Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et s un réel. Alors il est équivalent de dire que s et la borne supérieure de A ou que :

$$\begin{cases} s \text{ majore } A \\ \text{et Il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ vérifiant } \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = s. \end{cases}$$

Théorème 4 (Suites adjacentes). *Soit u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si :*
- *L'une des deux suites est croissante.*
- *L'autre suite est décroissante.*
- *La suite $u - v$ converge vers 0.*

Dans ce cas, u et v sont convergentes et convergent vers la même limite ℓ. De plus,
- *Si la suite u est croissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.*
- *Si la suite u est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell \leqslant u_n$.*

Application 5. Soit x un réel. Montrer que les suites définies par $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes.

Thèmes de réflexions 6. Pour $x = \pi$, que représentent les suites u et v de l'application précédente.

Corollaire 7. *Pour tout réel x, il existe une suite de rationnels convergeant vers x. On dit que l'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

3.2 Par encadrement, pour les suites réelles

Théorème 8 (Théorème des gendarmes). *Soit u, v et w trois suites réelles. On suppose que*
- *à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,*
- *et u et w converge toutes deux vers la même limite ℓ.*

Alors la suite v est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

On peut également adapter ce théorème pour le cas des limites infinies.

Théorème 9 (Variante DU gendarme). *Soit u et v deux suite réelles vérifiant $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :*
- *si la suite u diverge vers $+\infty$, il en est de même pour la suite v.*
- *si la suite v diverge vers $-\infty$, il en est de même pour la suite u.*

3.3 Cas des suites complexes

Proposition 10 (Version complexe du théorème des gendarmes)**.** *Soit z une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. S'il existe une suite* ***réelle*** *x vérifiant à partir d'un certain rang $|z_n - \ell| \leqslant x_n$ et $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$; alors $z_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.*

4 Éléments d'étude de suites récurrentes

Dans toute cette section, nous nous fixerons une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nous étudierons les suites u qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad (\mathrm{Rec}_f)$$

Attention ! Tout doit être redémontré dans le contexte de l'exercice. Les théorèmes suivants (à l'exception du corollaire 15 ne figurent pas au programme officiel.

4.1 À propos de la bonne définition de la suite

Définition 11 (Ensembles stables par une fonction)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit qu'un sous-ensemble A de I est stable par f s'il vérifie $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

Remarque 12. On peut traduire cette définition à l'aide de la notion d'image directe. En reprenant les notations de la définition précédente, un ensemble A est stable par f si et seulement si $f(A) \subset A$.

Proposition 13. *Si A est un ensemble stable par f et si $u_0 \in A$, alors la suite u définie par la relation* (Rec_f) *existe bien pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.*

4.2 À propos des limites possibles

Théorème 14 (Admis provisoirement)**.** *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et que u est une suite d'éléments de I convergente vers un réel $\ell \in I$, si de plus la fonction f est* ***continue*** *en ℓ, alors la suite $n \mapsto f(u_n)$ est également convergente et sa limite vaut $f(\ell)$.*

Corollaire 15 (La limite éventuelle de u est un point fixe)**.** *Si la suite u converge vers un point de I et que f est continue sur I, alors sa limite ℓ est un point fixe de f. C'est-à-dire $f(\ell) = \ell$.*

Attention ! Ces théorèmes sont inutiles tant qu'on n'a pas prouvé *l'existence* d'une limite pour u.

4.3 Méthode avec une fonction f croissante

Méthode 16. Si f est croissante sur un intervalle stable I et si $u_0 \in I$, alors on peut montrer par récurrence que la suite u est monotone.

4.4 Méthode avec le signe de $f - \mathrm{Id}$

Méthode 17. Si sur un intervalle stable I, on a $\forall x \in I, f(x) - x \geqslant 0$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$, alors on peut montrer que la suite u est croissante.

4.5 Cas des fonctions décroissantes

Méthode 18. Si f est décroissante sur un intervalle stable I et si $u_0 \in I$, alors on peut montrer que chacune des deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et les monotonies respectives sont opposées.