Colles semaine 18

En bref

- Définition des limites de suites (réelles et complexes).
- Propriété algébrique des limites.
- Propriétés prouvant la convergence : suites adjacentes, théorème de limite monotone et théorème des gendarmes.
- Cas des sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
- Exemples d'études de suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$:
  - Illustration de l'intérêt de la recherche d'intervalle stable par f.
  - Illustration de l'intérêt de l'hypothèse de croissance de f permettant de prouver la monotonie de u.
  - Illustration de l'intérêt d'étudier le signe de $f(x) - x$ pour étudier la monotonie de u.
  - Illustration de l'intérêt d'étudier séparément (u_{2n}) et (u_{2n+1}) lorsque f est décroissante sur un intervalle stable.
- Définition des limites de fonctions
- Continuité des fonctions, propriétés globales.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Citer et prouver le théorème des gendarmes (pour des suites, ou pour des fonctions).
- Définir la notion de suites adjacentes et prouver que deux suites adjacentes sont convergentes.
- Montrer que si la suite u vérifie $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$, alors la suite u est minorée par 2 et converge en décroissant vers 2.
- Citer le théorème de composition de limites pour la composée d'une suite et d'une fonction. En déduire que si une suite u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ et que f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Note aux colleurs

- Concernant les suites récurrentes, le seul résultat au programme est celui affirmant que si u converge vers ℓ, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f. Tout le reste doit être redémontré. C'est pourquoi on veillera à guider suffisamment l'énoncé. Néanmoins on a déjà passé pas mal de temps à détailler toutes les méthodes possibles.
- Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.

En détail

1 Éléments d'étude de suites récurrentes

Reprise du programme précédent.

2 Limites des fonctions

Dans toute cette section, I désignera un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On désignera également par x_0 un réel de I, ou éventuellement une extrémité de I si I est un intervalle ouvert. Par exemple, si $I =]0\,;\,1[$, on s'autorisera à considérer $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$. On notera $x_0 \in \overline{I}$ pour signifier ce fait.

2.1 Définitions

2.1.1 Cas des limites finies en un point

Définition 1 (Limite finie en un point)**.** Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit également x_0 un réel de I ou une extrémité de I, si I est un intervalle ouvert. Par exemple, si $I =]0\,;\,1[$, on s'autorisera à considérer $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

Si ℓ est un réel, on dit que f admet pour limite ℓ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\ ,\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$.

Remarque 2. Notons que f peut admettre une limite en x_0 sans être définie en x_0.

Remarque 3. On peut également définir des limites à droite et à gauche en x_0. Par exemple, en reprenant les notations de la définition 1, on dit que f admet ℓ pour limite à droite en x_0 (On suppose alors que x_0 n'est pas la borne supérieure de I.) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I \cap [x_0\,;\, x_0 + \alpha[\ ,\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \geqslant x_0}} f(x) = \ell$.

Le lecteur généralisera comme un grand les définitions de limites à gauche ou encore les définitions de limites à gauche strictes telles $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

2.1.2 Cas des limites infinies en un point

Définition 4. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit également x_0 un réel de I ou une extrémité de I.

i) On dit que f admet pour limite $+\infty$ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\ ,\quad f(x) \geqslant M.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$.

ii) On dit que f admet pour limite $-\infty$ en x_0 si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\ ,\quad f(x) \leqslant m.$$

Remarque 5. Bien sûr, toutes ces définitions, s'adaptent dans le cas des limites à gauche ou à droite, ou à gauche strictement, etc.

2.1.3 Cas des limites finies en l'infini

Définition 6 (Limite finie en $x \to +\infty$)**.** Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On supposera que I est un intervalle non majorée (c'est-à-dire qu'il est de type $[\alpha\,; +\infty[$ ou $]\alpha\,; +\infty[$ pour un certain réel α).

Si ℓ est un réel, on dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]a\,; +\infty[\ ,\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$.

Exercice 7. Écrire la définition correspondante pour les limites en $x \to -\infty$.

2.1.4 Cas des limites infinies en l'infini

Définition 8 (Limite infinie en $x \to -\infty$)**.** Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On supposera que I est un intervalle non minorée (c'est-à-dire qu'il est de type $]-\infty\,; \alpha]$ ou $]-\infty\,; \alpha[$ pour un certain réel α).

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $x \to -\infty$ si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty\,; a[\ ,\quad f(x) \geqslant M.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$.

Exercice 9. Adapter la définition précédente pour :
- La limite $+\infty$ en $x \to +\infty$.
- La limite $-\infty$ en $x \to +\infty$.
- La limite $-\infty$ pour $x \to -\infty$.

2.2 Propriétés des limites

Théorème 10 (Unicité de la limite)**.** *Soit x_0 un réel appartenant à I ou une extrémité de I (qui englobe le cas où $x_0 = \pm\infty$). Alors, la limite éventuelle (finie ou infinie) de f en x_0 est unique.*

2.2.1 Opérations algébriques

Proposition 11. *Si f et g sont deux fonctions définies sur I qui admettent chacune une limite finie en x_0 (un point de I ou une extrémité), notées respectivement ℓ_f et ℓ_g. Alors :*

i) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow{x \to x_0} \alpha \ell_f + \beta \ell_g$.

ii) $(f(x)g(x)) \xrightarrow{x \to x_0} \ell_f \ell_g$.

iii) Si $\ell_f \neq 0$, alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $I \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[$ et on a $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) \xrightarrow{x \to x_0} \frac{\ell_g}{\ell_f}$.

Remarque 12. Si les limites ℓ_f et ℓ_g peuvent être infinies, alors le théorème s'applique encore à condition de généraliser les règles vues sur les limites de suites. En particulier, certaines formes restent indéterminées.

2.2.2 Limites et ordre

Proposition 13. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de $I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité. On suppose que f admet une limite (finie ou infinie) ℓ en x_0 et que $\ell > a$. Alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel, f est strictement supérieure à a. Autrement dit :*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\ ,\ f(x) > a.$$

Remarque 14. Comme pour les suites, il est crucial que l'inégalité $\ell > a$ soit stricte.

Proposition 15 (Passage à la limite des inégalités)**.** *Soit f et g deux fonctions définies sur I et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité. On suppose que f et g admettent chacune une limite (finie ou infinie) en x_0, notée respectivement ℓ_f et ℓ_g. On suppose de plus que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$. Alors $\ell_f \leqslant \ell_g$.*

Remarque 16. Bien sûr, il suffirait que l'inégalité $f(x) \leqslant g(x)$ soit vraie seulement sur un voisinage de x_0 et pas nécessairement sur I tout entier.

2.2.3 Composition de limites

Théorème 17 (Théorème de composition de limite (version fonctionnelle))**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On se donne deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$, de sorte que la composée $g \circ f$ est bien définie. On se donne également un point x_0 appartenant à I ou qui est une extrémité de I. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$. On suppose également que ℓ appartient à J ou est une extrémité de J et que $g(y) \xrightarrow{y \to \ell} L$.*

Alors la fonction $g \circ f$ admet une limite en x_0 et $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \to x_0} L$.

Remarque 18. Les valeurs de x_0, ℓ et L de ce théorème peuvent être infinies.

Remarque 19. Ce théorème est souvent utilisé dans le cas où $\ell \in J$ et que g est continue en ℓ. Dans ce cadre, on a $L = g(\ell)$.

Théorème 20 (Composition de fonction et de suites)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit également u une suite convergeant vers une limite ℓ. On suppose que ℓ appartient à I ou est une extrémité de I. On suppose enfin que f admet pour limite L en $x \to \ell$. Alors la suite $n \mapsto f(u_n)$ converge vers L.*

Remarque 21. Les valeurs de ℓ et L de ce théorème peuvent être infinies.

Remarque 22. Ce théorème est souvent utilisé dans le cas où $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ. Dans ce cadre, on a $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = f(\ell)$.

2.2.4 Prouver l'existence de limites

Théorème 23 (Théorème de limite monotone)**.** *Soit f une fonction croissante sur I et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité.*

i) La fonction f admet une limite à gauche stricte en x_0 (qui peut être finie ou $+\infty$ si x_0 est la borne supérieure de I).

ii) La fonction f admet une limite à droite stricte en x_0 (qui peut être finie ou $-\infty$ si x_0 est la borne inférieure de I.

iii) Si de plus x_0 est un point intérieur à I, alors

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

Exercice 24. Écrire le théorème des gendarmes pour les limites de fonctions.

2.3 Résultats de croissance comparées sur les limites de fonctions

2.3.1 Limites en l'infini

Proposition 25 (Croissances comparées en $+\infty$)**.** *Les limites suivantes sont à connaître. On peut invoquer ces résultats sur une copie sans justification en précisant « par résultat de croissances comparées classiques, on a ... »*

i) Si $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ est un polynôme non constant ($n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$), alors $P(x) \xrightarrow{x \to +\infty} \pm\infty$. (Le signe étant celui du coefficient dominant a_n.)

ii) $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ *et plus généralement, pour tous réels* $a > 1$ *et* $\alpha > 0$: $\frac{a^x}{x^\alpha} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$.

iii) $x\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ *et plus généralement, pour tous réels* $a \in \left]-1\,;\,1\right[$ *et* $\alpha > 0$: $a^x x^\alpha \xrightarrow{x\to+\infty} 0$.

iv) $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ *et plus généralement, pour tous réels* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$: $\frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$.

Proposition 26 (Adaptation en $-\infty$)**.** *Les limites suivantes sont à connaître. On peut invoquer ces résultats sur une copie sans justification en précisant « par résultat de croissances comparées classiques, on a ... »*

i) Si $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *est un polynôme non constant (*$n \geqslant 1$ *et* $a_n \neq 0$*), alors* $P(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \pm\infty$*. Le signe étant déterminé de la manière suivante :*
- *Si* $a_n > 0$ *et si* n *est pair, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$.
- *Si* $a_n > 0$ *et si* n *est impair, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.
- *Si* $a_n < 0$ *et si* n *est pair, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.
- *Si* $a_n < 0$ *et si* n *est impair, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$.

ii) $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$ *et plus généralement, pour tout réel* $a \in \left]0\,;\,1\right[$ *et pour tout entier naturel* n : $\frac{a^x}{x^n} \xrightarrow{x\to-\infty} \pm\infty$ *; le signe dépendant de la parité de* n.

iii) $x\mathrm{e}^{x} \xrightarrow{x\to-\infty} 0$ *et plus généralement, pour tout réel* $a > 1$ *et pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$: $a^x x^n \xrightarrow{x\to-\infty} 0$.

2.3.2 Limites en zéro

Proposition 27 (Croissances comparées en 0^+)**.** *Les limites suivantes sont à connaître. On peut invoquer ces résultats sur une copie sans justification en précisant « par résultat de croissances comparées classiques, on a ... »*

i) $x\ln(x) \xrightarrow{x\to 0^+} 0$

ii) Plus généralement, pour tous réels $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$: $x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow{x\to 0^+} 0$.

3 Rappels sur les fonctions continues

3.1 Définitions

Définition 28 (Continuité en un point)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si elle admet une limite en x_0 et que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition 29 (Continuité sur un intervalle)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et J un intervalle inclus dans I. On dit que f est continue sur J si la restriction de f sur J est continue en chaque point de J.

Attention ! On parle bien, dans la définition précédente, de la *restriction* de f à J. Par exemple, la fonction $\mathbb{1}_{[0\,;\,1]}$ est bien continue sur $[0\,;\,1]$ alors qu'elle n'est pas continue en 0. (Mais sa restriction à l'intervalle $[0\,;\,1]$ est bien continue en 0).

On déduit de ces considérations un lemme très utile pour étudier la continuité des fonctions définies par morceaux :

Lemme 30. *Soit* g *une fonction définie sur un intervalle* J *et* f *une autre fonction définie sur un sous-ensemble* E *de* $\mathbb{R}$*. Soit également* $x_0 \in E$*. On suppose qu'il existe un réel* $\alpha > 0$*, tel que :*

i) $\left]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha\right[\subset J \cap E$,

ii) $\forall t \in \left]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha\right[, f(t) = g(t)$,

iii) la fonction g *est continue sur* $\left]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha\right[$.

Alors la fonction f *est continue en* x_0.

3.2 Opérations sur les fonctions continues

Lemme 31 (L'ensemble des fonctions continues est stable par combinaison linéaire.). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues sur I.*

Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $(\alpha f + \beta g)$ est continue sur I.

Proposition 32. *Le produit de fonctions continues, le quotient de fonctions continues (si le dénominateur ne s'annule pas), la composition de fonctions continue sont encore des fonctions continues.*

Proposition 33. *Si f et g sont deux fonctions continues $I \to \mathbb{R}$, alors*
- *La fonction $|f|$ est encore continue sur I.*
- *La fonction $\max(f, g)$ est encore continue sur I.*

3.3 Propriétés globales des fonctions continues

La continuité d'une fonction sur un intervalle est une propriété très forte [1] qui a certaines conséquences relativement intuitives mais pas si facile à prouver à moins de réaliser une étude poussée de la structure du corps des réels.

Théorème 34 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I avec $a < b$. (On supposera également $f(a) < f(b)$ par simple commodité d'écriture). Si y est un réel vérifiant $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, alors il admet un antécédent par f.*

Le théorème des valeurs intermédiaires admet un corollaire qui s'énonce très simplement.

Corollaire 35 (Image d'un intervalle). *Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors l'image directe $f(I)$ est un intervalle.*

Remarque 36. La preuve de ce dernier corollaire nécessite d'admettre ou de prouver qu'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (a \leqslant x \leqslant b) \implies x \in I.$$

On dispose également d'une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, lorsque l'on évoque des limites.

Théorème 37 (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé). *Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I avec $a < b$ (comprenant éventuellement le cas $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). On suppose que f admet une limite en a et en b que l'on notent respectivement ℓ_a et ℓ_b.*

On supposera également $\ell_a < \ell_b$ par simple commodité d'écriture). Si y est un réel vérifiant $\ell_a < y < \ell_b$, alors il admet un antécédent par f.

Pause de lecture 1 : Prouver ce théorème des valeurs intermédiaires généralisé à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires classiques et des définitions formelles de limites.

Théorème 38 (Image d'un segment). *Si f est une fonction continue sur un intervalle* ***fermé borné*** *I, alors l'image directe $f(I)$ est un intervalle fermé borné. (on parle aussi de segment pour désigner un intervalle fermé borné).*

Remarque 39. Si I est un intervalle mais pas un segment, alors $f(I)$ est un intervalle qui peut être de nature très différente de I. Le lecteur cherchera des exemples où I est borné mais pas $f(I)$, ou encore des exemples ou I est fermé mais pas $f(I)$, etc.

Corollaire 40. *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, si I est un segment et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ existe ainsi que $\inf\limits_{x\in I} f(x)$. De plus, il existe deux réels a et b appartenant à I tels que $f(a) = \sup\limits_{x\in I} f(x)$ et $f(b) = \inf\limits_{x\in I} f(x)$. Ces bornes supérieure et inférieure sont donc des maximum et minimum.*

1. À titre de curiosité, on pourra essayer de comprendre qu'il existe autant de fonctions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que de nombres réels. Alors qu'il existe évidemment bien plus de fonctions totales de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Théorème 41 (Théorème de la bijection). *Soit f une fonction continue $I \to \mathbb{R}$. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone. De plus, dans ce cas, elle réalise une bijection de I sur $f(I)$ (qui est encore un intervalle). La bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est alors encore une fonction continue et de même monotonie que f.*

Théorème 42 (Théorème de la bijection, version aux limites). *Soit $]a\,;\,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $]a\,;\,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f admet des limites en a et b que l'on note respectivement ℓ_a et ℓ_b. Si f est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $]a\,;\,b[$ et J où J est l'intervalle définie par :*
- *$J =]\ell_a\,;\,\ell_b[$ si f est strictement croissante.*
- *$J =]\ell_b\,;\,\ell_a[$ si f est strictement décroissante.*

De plus, la réciproque de f est encore une bijection entre J et $]a\,;\,b[$ qui a même sens de variation que f et qui est également continue.
Ce théorème reste valables si les bornes a et b ou les limites ℓ_a et ℓ_b sont infinies.

Pause de lecture 2 : Prouver le théorème de la bijection dans sa version aux limites à l'aide de sa version classique et des définitions formelles de limites.

3.4 Extension de la continuité aux fonctions complexes

Nous étendons brièvement les résultats précédents aux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Attention ! Il n'est pas question ici d'étendre ces résultats sur les fonctions de la variable complexe définie sur $\mathbb{C}$. La définition de continuité ou de limite dans ce cadre est quand même plus délicate. Je renvoie au cours de deuxième année pour des détails sur ce fait.

Définition 43 (Limite de fonctions à valeurs complexe). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$ et x_0 un réel de I ou une extrémité (éventuellement $x_0 = \inf(I)$ ou $x_0 = \sup(I)$). Soit également z un complexe.
- Pour x_0 un réel fini ; on dit que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = z$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \delta\,;\,x_0 + \delta]\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

- Pour $x_0 = +\infty$; on dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = z$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [a\,;\,+\infty[\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

- Pour $x_0 = -\infty$; on dit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = z$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-infty\,;\,a]\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Théorème 44 (Théorème des gendarmes , version complexe). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$ et x_0 un réel de I ou une extrémité (éventuellement $x_0 = \inf(I)$ ou $x_0 = \sup(I)$). Soit enfin z un complexe.*

S'il existe une fonction réelle positive g vérifiant : $\begin{cases} \forall x \in I,\ |f(x) - z| \leqslant z \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ *; alors la fonction f admet pour limite z en x_0.*

Application 45. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 46. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x_0 \in I$, on dit que f est continue en x_0 si elle y admet une limite et si $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I

Lemme 47. *Pour deux fonctions f et g complexe continue sur un intervalle I, la somme $f + g$, le produit fg ou encore les combinaisons linéaires $\alpha f + \beta g$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ sont continues sur I.*

Proposition 48. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. La fonction f est continue sur I si et seulement si chacune des fonctions réelles* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *est continue sur I.*

Lemme 49. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Si la fonction f est continue sur I, alors la fonction réelle $|f|$ est continue sur I.*

La réciproque est fausse en général.

Théorème 50 (Les fonctions continues sur un segment sont bornées)**.** *Soit a, b deux réels vérifiant $a < b$ et une fonction f continue sur le segment $[a\,;\,b]$ à valeurs complexe. Alors la fonction f est bornée et atteint sa borne sur le segment $[a\,;\,b]$. Autrement dit :*

$$\exists c \in [a\,;\,b]\,,\ \forall t \in [a\,;\,b]\, |f(t)|\, |f(c)|\,. \tag{4}$$

Proposition 51. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Alors :*

— *La fonction* $\exp(f)$ *est continue sur I,*

— *si la fonction f ne s'annule pas, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur I.*