Colles semaine 19

En bref

- Définition des limites de suites (réelles et complexes).
- Définition des limites de fonctions
- Continuité des fonctions, propriétés globales.
- Notion d'espaces vectoriels. Règles de calculs dans les espaces vectoriels.
- Notions de sous-espaces vectoriels, exemple en présentation cartésienne ou paramétriques.
- Familles libres, génératrices, bases.
- Sous-espace vectoriel engendrée par une famille. Notation Vect.
- Savoir trouver une base d'un sous-espace vectoriel décrit par des équations cartésiennes.
- Savoir déterminer une présentation cartésienne de $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ connaissant les vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Citer le théorème de composition de limites pour la composée d'une suite et d'une fonction. En déduire que si une suite u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ et que f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.
- Montrer que $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en zéro.
- Citer le théorème sur l'image directe des intervalles (respectivement des segments) par une fonction continue.
- Montrer que l'ensemble $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2\mathrm{i}y + z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ et en donner une base. *On pourra varier les exemples mais on se limitera à des exemples dans $\mathbb{K}^n$ pour $n \leqslant 4$.*
- Étudier la liberté de la famille $\Big((1, 1, -1), (-1, 1, 1), (2, 1, 2)\Big)$ dans $\mathbb{R}^3$. *On pourra varier les exemple mais on se limitera à des exemples dans $\mathbb{K}^n$ pour $n \leqslant 4$.*
- Montrer que $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$.

Note aux colleurs

- Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.
- Pour cette première semaine d'algèbre linéaire, il est recommandé de se limiter à des exercices dans $\mathbb{K}^n$ ou des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.
- Les sommes de sous-espaces vectoriels et à fortiori les sommes directes ne sont pas au programme.

En détail

1 Limites et continuité des fonctions

Reprise du programme précédent.

2 La structure d'espace vectoriel

2.1 Définition des espaces vectoriels

Définition 1 (Espace vectoriel)**.** On appelle espace vectoriel sur K ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel la donnée d'un triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble non vide muni d'une addition $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ et d'une multiplication externe $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ vérifiant les huit axiomes suivants :

i) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$. (L'addition est associative)
ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ (x+y) = y+x$. (L'addition est commutative)
iii) $\exists e \in E,\ \forall x \in E,\ e+x = x+e = x$. (Il existe un élément neutre pour l'addition)
iv) $\forall x \in E,\ \exists x' \in E,\ x+x' = x'+x = e$. (Chaque élément admet un opposé)
v) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda\mu)\cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$. (La multiplication externe est associative)
vi) $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$. (Le scalaire 1 est neutre pour la multiplication externe).
vii) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$. (Distributivité de la multiplication externe sur l'addition des scalaires)
viii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$. (Distributivité de la multi plication externe sur l'addition des vecteurs.)

2.2 Règles de calculs

Proposition-Définition 2. *Tout espace vectoriel admet par définition un élément neutre pour l'addition. C'est-à-dire un élément $e \in E$ vérifiant $\forall x \in E,\ x+e = e+x = x$. Cet élément est unique et s'appelle le vecteur nul de E. On le note très souvent 0_E.*

Proposition-Définition 3. *Tout vecteur x d'un espace vectoriel E admet par définition un opposé, c'est-à-dire un élément x' vérifiant $x'+x = x+x' = 0_E$. Cet élément est unique et se note normalement $-x$.*

Proposition 4 (Règles de calculs dans un espace vectoriel.)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors,*

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)\,.$$

Où 0_E est l'élément neutre pour l'addition du groupe $(E,+)$.

Par ailleurs :

$$(-\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x).$$

Où le signe "moins" fait référence à l'opposé dans le corps $\mathbb{K}$ pour le premier terme et à l'opposé dans l'espace vectoriel E pour les deux termes suivants.

2.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il vérifie les trois conditions suivantes :

i) $0_E \in F$, où 0_E est l'élément neutre pour l'addition de l'espace vectoriel E ;
ii) $\forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F$,

iii) $\forall x \in F \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F$, où l'on note dorénavant λx le résultat de la multiplication externe.

On traduit cela en disant que F est stable par addition et par multiplication externe.

Proposition 6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

i) F est non vide,

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda x + y \in F$.

Lemme 7. *Un bon étudiant de PTSI sait déterminer en moins d'une minute si chacune des parties suivantes est ou non un sous-espace vectoriel.*

i) $\{(x,y,z) \in C^3 \mid x + 2y + \ iz = 0\}$ dans $\mathbb{C}$.

ii) L'ensemble des complexes imaginaires purs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

iii) L'ensemble des complexes imaginaires purs dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

iv) $\{z \in \mathbb{C} | \mid |z| \leqslant 1\}$ dans $\mathbb{C}$?

v) L'ensemble des matrices symétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

vi) L'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

vii) L'ensemble des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

viii) L'ensemble des fonctions bornées dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

ix) Soit $M \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des fonctions bornées par M dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

x) L'ensemble des fonctions paires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

xi) L'ensemble des fonctions croissantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

xii) L'ensemble des fonctions monotones dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

xiii) L'ensemble des suites convergentes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

xiv) L'ensemble des suites convergentes vers 0 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

xv) L'ensemble des suites convergentes vers 1 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Proposition 8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de E.*

3 Combinaisons linéaires

3.1 Familles libres

Définition 9 (Famille libre)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est **libre** si elle vérifie l'implication suivante :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \lambda_i = 0 \right). \tag{1}$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle de la famille est celle à coefficients tous nuls.

Notons que l'implication réciproque est vérifiée par toute les familles.

On appelle famille **liée** toute famille qui n'est pas libre.

Lemme 10 (Principe d'identification des coefficients d'une combinaison linéaire de famille libre)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille **libre** de vecteurs de E. Alors, pour toutes familles de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$:*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \lambda_i = \mu_i \right). \tag{2}$$

Proposition 11. *Voici une liste de propositions élémentaires à propos des familles libres :*

i) Une famille contenant le vecteur nul est liée.

ii) Une famille à un élément est libre si et seulement si l'unique élément de la famille est non nul.

iii) Tous les éléments d'une famille libre sont distinct deux à deux.

iv) Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.

v) Toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.

Proposition 12. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. Alors, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs x_i est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.*

3.2 Familles génératrices

Définition 13 (Famille génératrice)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si tout vecteur y de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$. Autrement dit si :

$$\forall y \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

3.3 Bases

Définition 14. Une famille qui est à la fois une famille libre et une famille génératrice de E est appelée une base de E.

Proposition-Définition 15. *Beaucoup d'espaces vectoriels usuels sont muni de bases « naturelles » dite canonique.*

- *Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_1, \dots e_n)$ où $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $e_i = \left(0, \quad \dots, \quad 0, \quad \underset{i\text{-ème coef}}{1}, \quad 0, \dots \quad 0\right)$ est une base appelé base conique de $\mathbb{K}^n$.*
- *Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ définie ci-dessous est une base appelé base canonique de $\mathcal{M}_n(\shortmid)K$.*

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \forall j \in [\![1\,;\,p]\!],\ E_{i,j} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- *Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*

3.4 Sous-espaces vectoriels engendrées par une famille

Définition 16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel engendré par une famille[1] $\mathcal{F}$ de E et on note $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille. Autrement dit : si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille finie, alors :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ :\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}. \tag{3}$$

Lemme 17 (le sous-espace engendré par une famille est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteur de E. Alors tout sous-espace vectoriel F de E qui contient la famille $(x_1, \dots, x_n)$ contient encore* $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 18. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'un espace vectoriel E est génératrice de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$.

1. le programme officiel se limite au cas où la famille contient un nombre fini de vecteurs