Colles semaine 20

En bref

- Notion d'espaces vectoriels. Règles de calculs dans les espaces vectoriels.
- Notions de sous-espaces vectoriels, exemple en présentation cartésienne ou paramétriques.
- Familles libres, génératrices, bases.
- Sous-espace vectoriel engendrée par une famille. Notation Vect.
- Savoir trouver une base d'un sous-espace vectoriel décrit par des équations cartésiennes.
- Savoir déterminer une présentation cartésienne de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ connaissant les vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.
- Somme de sous-espaces vectoriels et sommes directes.
- Applications linéaires. Définition et exemples systématiques en petite dimension.
- Noyau et Image d'une application linéaire. Notation $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Critère sur l'injectivité.
- La combinaison linéaire, la composée d'applications linéaires est encore linéaire. L'application réciproque d'un isomorphisme est encore un isomorphisme.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Montrer que l'ensemble $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2iy + z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ et en donner une base. *On pourra varier les exemples mais on se limitera à des exemples dans $\mathbb{K}^n$ pour $n \leqslant 4$.*
- Étudier la liberté de la famille $\Big((1, 1, -1), (-1, 1, 1), (2, 1, 2)\Big)$ dans $\mathbb{R}^3$. *On pourra varier les exemple mais on se limitera à des exemples dans $\mathbb{K}^n$ pour $n \leqslant 4$.*
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (voire $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour n quelconque), donner une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires.
- Pour une application linéaire f, rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et montrer qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels.
- Montrer qu'une application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Note aux colleurs

- Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.
- Pour les sommes de sous-espaces vectoriels, le programme officiel demande de ne traiter que le cas à deux sous-espaces vectoriels en première année. J'ai évidemment traité le cas général pour éviter que les étudiants s'habitue trop au critère miraculeux sur l'intersection.

En détail

1 La structure d'espace vectoriel

Reprise du programme précédent.

2 Combinaisons linéaires

Reprise du programme précédent.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1 (Somme de deux sous-espace vectoriel)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G et on note $F+G$ le sous-espace vectoriel :

$$F+G=\{x_F+x_G\ :\ x_F\in F,\, x_G\in G\}\,. \tag{1}$$

Le lecteur vérifiera que cela définit bien un sous-espace vectoriel.

Définition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également, $(F_1,\dots,F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme des sous-espaces vectoriels comme le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i=1}^{n}F_i=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\mid x_1\in F_1,\dots,x_n\in F_n\right\}. \tag{2}$$

Le lecteur se convaincra que cette définition coïncide avec la précédente lorsque $n=2$.

Remarque 3 (La somme de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant chacun des sous-espaces vectoriels)*.* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également, $(F_1,\dots,F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors, pour tout sous-espace vectoriel G de E on a l'implication suivante :

$$(\forall i\in[\![1\,;\,n]\!],\ F_i\subset G)\implies\sum_{i=1}^{n}F_i\subset G \tag{3}$$

Définition 4 (Somme directe)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $(F_1,\dots,F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $\sum\limits_{i=1}^{n}F_i$ est directe et on note $F_1\oplus\cdots\oplus F_n$ si l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\forall(x_1,\dots x_n)\in F_1\times\cdots\times F_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i=0_E\implies\forall i\in[\![1\,;\,n]\!]\,x_i=0_E\right). \tag{4}$$

Notons que l'implication réciproque « $\Leftarrow$ » est toujours vérifiée.

Proposition 5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors, la somme $F+G$ est directe si et seulement si $F\cap G=\{0_E\}$.*

Attention : Cela ne se généralise malheureusement pas à plus de deux sous-espaces vectoriels. Le lecteur étudiera attentivement l'exemple dans $\mathbb{K}^2$ des sous-espaces vectoriels $F=\mathrm{Vect}((1,0))$, $G=\mathrm{Vect}((0,1))$ et $H=\mathrm{Vect}((1,1))$ pour s'en convaincre.

Proposition 6. *Dans une somme directe, on a unicité de la décomposition d'un vecteur comme une somme d'élément de chaque sous-espace vectoriel. Plus précisément, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n est un entier naturel non nul, $(F_1,\dots,F_n)$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E en somme directe et si $x\in F_1+\cdots+F_n$; alors $\exists!(x_1,\dots,x_n)\in F_1\times\cdots\times F_n,\ x=x_1+\cdots+x_n$.*

Définition 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que les sous-espaces vectoriels F_i sont supplémentaires s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

i) La somme $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est directe.

ii) Et cette somme est égale à E, c'est-à-dire $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i = E$

Remarque 8. On prêtera attention, dans la définition précédente, à l'ordre dans lequel on impose ces deux conditions. Il n'est, en effet, pas question d'employer la notation $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$ avant d'avoir montré ou supposé que la somme était directe.

Proposition 9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors :*

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x = x_1 + \cdots + x_n. \tag{5}$$

4 Applications linéaires

4.1 Terminologie

Définition 10. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. On dit que f est une *application linéaire* ou encore un *morphisme d'espaces vectoriels* si elle vérifie les deux axiomes suivants :

i) $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Certains cas particuliers donnent lieu à un vocabulaire spécifique ; en reprenant les notations précédentes :

— Si $F = E$, on dit que f est un *endomorphisme.*
— Si f est bijective, on dit que c'est un *isomorphisme.*
— Si f est un endomorphisme bijectif, on dit que c'est un *automorphisme.*
— Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire.*

Définition 11. Soit E et F deux espaces vectoriels. On dit qu'il sont *isomorphes* s'il existe un isomoprhisme d'espaces vectoriels entre E et F.

4.2 Propriétés des applications linéaires

4.2.1 Généralités

Commençons par un lemme assez trivial :

Lemme 12. *Si $f : E \to F$ est un morphisme d'espaces vectoriels, alors $f(0_E) = 0_F$.*

Proposition 13. *Soit $f : E \to F$ une application entre espaces vectoriels. L'application f est linéaire si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Proposition 14 (Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels)**.** *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels ; alors :*

i) Pour tout sous-espace vectoriel A de E, son image directe $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

ii) Pour tout sous-espace vectoriel B de F, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E

4.2.2 Noyaux et images

La proposition 14 possède deux cas particuliers d'applications très importants :

Proposition-Définition 15. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espace vectoriel. Alors l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E que l'on appelle noyau de f et que l'on note* $\ker(f)$.

Proposition 16. *Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$.

Proposition-Définition 17. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors l'ensemble $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F que l'on appelle image de f et que l'on note* $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 18. Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

4.3 Quelques résultats de structure

Notation 19. Si E et F sont deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des morphismes d'espaces vectoriels de E vers F. Lorsque $E = F$, on note simplement $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$. Enfin, on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E (c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes bijectifs.)

Lemme 20. *Soit E et F deux espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble F^E des applications de E dans F.*

Attention ! L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 21 (La composée d'applications linéaire est encore linéaire)**.** *Soit E, F et G trois espaces vectoriels ainsi que $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si f et g sont linéaires, alors l'application $g \circ f$ est linéaire.*

Lemme 22 (Distributivité de la composition sur l'addition)**.** *Soit E, F et G trois espaces vectoriels.*
- *Si $f : E \to F$ ainsi que $g_1 : F \to G$ et $g_2 : F \to G$ sont linéaires alors, $(g_1+g_2)\circ f = g_1\circ f+g_2\circ f$. (Ceci est vrai pour toutes applications, par définition)*
- *Si $f_1 : E \to F$ et $f_2 : E \to F$ ainsi que $g : F \to G$ sont linéaires alors, $g\circ(f_1+f_2) = g\circ f_1+g\circ f_2$. (Ceci est en général faux si l'application g n'est pas linéaire)*

Proposition 23. *Soit $f : E \to F$ un isomorphisme (donc une application bijective) d'espaces vectoriels. Alors la réciproque f^{-1} est encore un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Définition 24. Soit E et F deux espaces vectoriels. On dit que E est *isomorphe* à F s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et F.

Remarque 25. Le résultat sur la réciproque des isomorphismes permet d'affirmer que E est isomorphe à F si et seulement si F est isomorphe à E.