Colles semaine 21

En bref

— Somme de sous-espaces vectoriels et sommes directes.
— Applications linéaires. Définition et exemples systématiques en petite dimension.
— Noyau et Image d'une application linéaire. Notation $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Critère sur l'injectivité.
— La combinaison linéaire, la composée d'applications linéaires est encore linéaire. L'application réciproque d'un isomorphisme est encore un isomorphisme.
— Dérivabilité des fonctions. Équivalence avec l'existence d'un développement limité d'ordre 1.
— Démonstration des formules de calculs de dérivées : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition et réciproque des application bijectives.
— Étude de la dérivabilité de fonctions définies « par morceaux ». Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (s'appelle aussi théorème de limite de la dérivée)
— Propriétés globales des fonctions dérivables : théorème de Rolle, égalités et inégalités des accroissements finis.
— Cas des fonctions à valeurs complexes.
— Dérivées itérés, notation $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ et formule de Leibniz.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

— Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (voire $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour n quelconque), donner une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires.
— Pour une application linéaire f, rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et montrer qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels.
— Montrer qu'une application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
— Citer et montrer e théorème de Rolle.
— Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty]$ en appliquant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.
— Citer sans démonstration l'inégalité des accroissements finis. L'appliquer pour montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ , u_{n+1} = \frac{1}{u_n+\frac{3}{2}} \end{cases}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Note aux colleurs

— Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.
— Pour les sommes de sous-espaces vectoriels, le programme officiel demande de ne traiter que le cas à deux sous-espaces vectoriels en première année. J'ai évidemment traité le cas général pour éviter que les étudiants s'habitue trop au critère miraculeux sur l'intersection.

En détail

1 Somme de sous-espaces vectoriels

Reprise du programme précédent.

2 Applications linéaires

Reprise du programme précédent.

3 Dérivabilité des fonctions

3.1 Dérivabilité en un point

Définition 1. Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que **$f$est dérivable en a** si l'application

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I - \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite s'appelle **le nombre dérivé de f en a** et se note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque 2. Quelques remarques sur cette définition :
— Pour tout $x \in I - \{a\}$, le réel $\tau_a(x)$ s'appelle le **taux d'accroissement** de la fonction f entre x et a. Que représente-t-il graphiquement ?
— Si f est dérivable en a, on a donc, quitte à changer de variable.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

— Le caractère dérivable d'une fonction en a est une propriété locale : si f et g sont deux fonctions qui coïncident au voisinage de a, f est dérivable en a si et seulement si g l'est. Dans ce cas, $f'(a) = g'(a)$.

Proposition 3 (Développement limité d'ordre 1)**.** *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
Alors, f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel α permettant d'écrire le développement limité suivants (ils sont équivalents) :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \alpha(x-a) + o(x-a).$$

Dans ce cas, le nombre α vérifiant la formule est unique et vaut $\alpha = f'(a)$.

Remarque 4. Commentons cette proposition :
— Par le même changement de variable que précédemment, ce développement limité est équivalent au suivant :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \alpha h + o(h). \tag{1}$$

— L'expression $y = f(x) + f'(a)(x-a)$ est l'équation d'une droite que l'on appelle tangente à la courbe de f en a. C'est en un sens la "meilleure" approximation affine de f au voisinage de a.

Définition 5 (Dérivabilité à gauche et à droite)**.** Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
— On dit que **f est dérivable à droite en a** lorsque $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite de a. On note alors $f'_{\mathrm{d}}(a)$ cette limite et on l'appelle **la dérivée à droite de f en a**.
— On dit que **f est dérivable à gauche en a** lorsque $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche de a. On note alors $f'_{\mathrm{g}}(a)$ cette limite et on l'appelle **la dérivée à gauche de f en a**.

Proposition 6. *Soient a un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors, f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et que $f'_{\mathrm{g}}(a) = f'_{\mathrm{d}}(a)$.*

3.2 Fonction dérivée

Définition 7 (Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction $f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ s'appelle **la fonction dérivée de f** .

Remarque 8. Si f est définie sur une réunion d'intervalles, on dit que f est dérivable si sa restriction à chaque intervalle de la réunion est dérivable.

Proposition 9 (Dérivable implique continue)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors, f est continue en a.*

Remarque 10. Attention la réciproque est fausse. Exemple de $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

3.3 Opérations sur les fonctions dérivables

3.3.1 Opérations algébriques

Proposition 11 (Opérations algébriques)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en un point a de I.*

i) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

ii) Le produit fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

iii) Si g ne s'annule pas en a, l'inverse $\frac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a, est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

iv) Si g ne s'annule pas en a, le quotient $\frac{f}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

3.3.2 Composition

Proposition 12 (Dérivée d'une composition)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'\left(f(a)\right) \times f'(a).$$

Remarque 13. La proposition précédente ne donne qu'une condition suffisante pour la dérivabilité de $g \circ f$. Si f n'est pas dérivable en a ou g n'est pas dérivable en $f(a)$, on ne peut rien conclure. Il faut alors revenir à la définition. On pourra, à titre d'exemple, étudier l'exercice **??**.

3.3.3 Dérivation des bijections réciproques

Proposition 14 (Dérivée de la fonction réciproque en un point)**.** *Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et continue, $b \in J$ et $a = f^{-1}(b)$. On suppose que f dérivable en a et que f^{-1} est continue en $f(a)$. Alors, f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et, dans ce cas,*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Si la fonction est continue sur un *intervalle* I, on sait en fait déjà que la fonction réciproque est continue. Ainsi :

Corollaire 15. *Si f est un bijection dérivable d'un intervalle I sur un intervalle J. Alors, f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.*

4 Propriétés globales des fonctions dérivables

4.1 Une propriété cruciale : l'inégalité des accroissements finis

Lemme 16 (Extremum local)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et x_0 un **point intérieur** à I (C'est-à-dire que $x_0 \neq \inf(I)$ et $x_0 \neq \sup(I)$). Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Également, le fait que x_0 soit un point intérieur à I est crucial. Par exemple, la fonction $\begin{array}{ccc} [0\,;\,1] & \to & [0\,;\,1] \\ x & \mapsto & x \end{array}$ admet un maximum local en 1, mais sa dérivée ne s'y annule pas.

Attention ! Bien sûr, ceci ne fournit qu'une condition suffisante pour l'existence d'un extremum local. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'a pas d'extremum en 0.

Théorème 17 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a\,;\,b] \to \mathbb{R}$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in [a\,;\,b]$ vérifiant $f'(c) = 0$.*

Application 18. Si un polynôme réel P de degré n admet n racines réelles , alors son polynôme dérivé P' admet $n-1$ racines réelles.

Théorème 19 (Égalité des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il existe alors un réel $c \in \,]a\,;\,b[$ vérifiant $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Corollaire 20 (Inégalité des accroissements finis, version avec majoration/minoration)**.** *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a\,;\,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que la fonction dérivé f' vérifie $\forall x \in [a\,;\,b]\,,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors, on peut écrire*

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Théorème 21 (Inégalité des accroissements finis, version alternative)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. S'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que*

$$\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leqslant M$$

alors,

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

Le lecteur est invité à comprendre que cette inégalité des accroissements finis ne dit pas autre chose que la trivialité suivante « Si un cycliste possède une vitesse instantanée qui ne dépasse jamais 40 km.h^{-1} au cours de son trajet, alors sa vitesse moyenne est inférieure ou égale à 40 km.h^{-1} »

4.2 Le(s) théorème(s) fondamental(aux) de l'analyse

Théorème 22 (Lien entre sens de variations et signe de la dérivée)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- *f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.*

Corollaire 23. *Une fonction dérivable sur I est constante si et seulement si sa fonction dérivée est la fonction nulle.*

Proposition 24. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Cette fonction est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ et s'il n'existe aucun intervalle de longueur strictement positive sur lequel f' est constante nulle.*

Le lecteur adaptera tout seul cette proposition pour les fonctions strictement décroissante.

Proposition 25 (Unicité des primitives à une constante près)**.** *Si f et g sont deux fonction dérivables sur un intervalle I et que $f' = g'$, alors il existe une constante C vérifiant $\forall x \in I,\ f(x) = g(x) + C$.*

Théorème 26 (Théorème fondamental de l'analyse). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, il existe une unique primitive de f qui s'annule en a. De plus, cette fonction est définie de la manière suivante :*

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 27. Nous ne pouvons pour l'instant montrer que l'unicité de cette primitive. Pour montrer son existence, il faut définir l'intégrale indépendamment de la notion de primitive. Ceci se fait en construisant l'intégrale comme la valeur de « l'aire sous la courbe ». Une telle définition n'est toutefois pas si aisée et fera l'objet d'un chapitre ultérieur. Notons que l'on pourrait également admettre l'existence de primitive et utiliser ce théorème pour définir l'intégrale.

4.3 Une autre application : prolongement de fonction $\mathcal{C}^1$.

Théorème 28 (Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ ou théorème de limite de la dérivée). *Soit a, b deux réels avec $a < b$. Soit également f une fonction définie sur $[a\,;b[$ et à valeurs réelles. On suppose que les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :*

i) La fonction f est continue sur le « fermé » $[a\,;b[$.
ii) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]a\,;b[$.
iii) La dérivée f' admet une limite finie en a que l'on note $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x)$.

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b[$ et $f'(a) = \ell$.

Remarque 29. Avec les mêmes hypothèses mais en supposant que la limite $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x)$ est infinie, on conclurait que la fonction f est non dérivable en a et qu'elle y admet une demi-tangente verticale.

5 Cas des fonctions à valeurs complexes

Définition 30. Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que ***f* est dérivable en *a*** si l'application à valeur complexe

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I - \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet une limite finie complexe. Cette limite est alors le nombre dérivé de f en a, que l'on note $f'(a)$.

On peut se ramener au cas des fonctions réelles en séparant les parties réelles et imaginaires à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 31. *Soient I un intervalle réel, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une application. Alors,*

f est dérivable en a (ou sur I) si, et seulement si, Re(f) et Im(f) le sont.

et dans ce cas,

$$f'(a) = (\mathrm{Re} f)'(a) + i\,(\mathrm{Im} f)'(a).$$

Corollaire 32. *Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est constante si, et seulement si, elle est dérivable avec une dérivée nulle.*

Explicitons maintenant les différences avec le cas réel.

Attention ! Les énoncés des théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux pour les fonctions à valeurs complexes.
Pour s'en convaincre, considérer, par exemple, la fonction $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{ix}$.

Proposition 33 (inégalité des accroissements finis : version complexe). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. S'il existe un **réel** $M \geqslant 0$ tel que*

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M$$

alors,

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

6 Dérivées itérées

6.1 Définitions et notations

Définition 34. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$ sur I** si f est dérivable sur I et si sa fonction dérivée f' est continue sur I.

Exemple 35. i) Les fonctions polynomiales, exponentielles, etc. sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

ii) La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 36 (Dérivées successives)**.** Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit les dérivées successives de f par récurrence. On pose $f^{(0)} = f$. Pour un entier naturel n donné, on suppose la fonction $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ déterminée. Si $f^{(n)}$ est dérivable en a, on pose $f^{(n+1)}(a) = \left(f^{(n)}\right)'(a)$, et si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, on pose $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.
Lorsqu'il existe, le nombre $f^{(n)}(a)$ s'appelle **le nombre dérivé n-ième de $f$en a**. On dit alors que f est n fois dérivable en a.
Lorsqu'elle existe, la fonction $f^{(n)}$ s'appelle **la dérivée n-ième de f**. On dit alors que f est n fois dérivable sur I.
On dit, de plus, que f est de **classe $\mathcal{C}^n$sur I** si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I.
Une fonction est dite de **classe $\mathcal{C}^\infty$sur I** si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier naturel n.

Remarque 37. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{K}$, et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$. On note aussi $f^{(n)}(a) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$ et $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

6.2 Calculs pratiques de dérivées itérées

Proposition 38. *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

i) Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $(\alpha f + \beta g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et on a même $(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$.

ii) Le produit fg est de classe $\mathcal{C}^n$.

iii) Le quotient $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) est de classe $\mathcal{C}^n$.

iv) La composée $g \circ f$ (si elle a un sens) est de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 39 (Formule de Leibniz)**.** *Soit I in intervalle de $\mathbb{R}$; f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$;a un point de I ainsi que $n \in \mathbb{N}^*$. Si chacune des fonctions f et g est n fois dérivable en a, alors le produit fg est n fois dérivable en a et la dérivée n-ème se calcule par :*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$