

Colles semaine 22

En bref

- Dérivabilité des fonctions. Équivalence avec l'existence d'un développement limité d'ordre 1.
- Démonstration des formules de calculs de dérivées : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition et réciproque des application bijectives.
- Étude de la dérivabilité de fonctions définies « par morceaux ». Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (s'appelle aussi théorème de limite de la dérivée)
- Propriétés globales des fonctions dérivables : théorème de Rolle, égalités et inégalités des accroissements finis.
- Cas des fonctions à valeurs complexes.
- Dérivées itérées, notation $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ et formule de Leibniz.
- Polynôme. Brèves construction formelle. Somme, produit, composition et dérivation formelle. Compatibilité avec les relations fonctionnelles équivalentes sur les fonctions polynomiales.
- Arithmétique des polynômes. Diviseurs et multiples. Théorème de division euclidienne.
- Zéros et racines : équivalence entre les deux notions. Multiplicité des racines, liens avec les dérivées itérées.
- Théorème fondamental de l'algèbre dans $\mathbb{C}$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Citer et montrer le théorème de Rolle.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty]$ en appliquant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.
- Citer sans démonstration l'inégalité des accroissements finis. L'appliquer pour montrer que la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n + \frac{3}{2}} \end{cases} \quad \text{converge vers } \frac{1}{2}.$$
- Citer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. montrer l'unicité¹ afférente.
- Montrer que $X - \alpha$ divise P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.
- Pour α une racine de P de multiplicité d , α est-elle racine de P' ? Si oui de quelle multiplicité ?

Note aux colleurs

- Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.
- Je n'ai pas encore eu le temps de définir la notion de polynômes irréductibles. Ni de donner la factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}$.
- Aucun exercice sur la multiplicité des racines n'a été traité. On se limitera aux définitions et questions de cours sur cette notion.

1. Les étudiants s'assureront qu'ils savent aussi montrer l'existence. Mais pour des raisons purement temporelles, les colleurs s'abstiendront de le vérifier explicitement.

En détail

Dérivabilité

Reprise du programme précédent

Polynômes

1 Construction sommaire

1.1 Définitions

Définition 1. On appelle *polynôme* à coefficient dans $\mathbb{K}$ toute suite d'éléments de $\mathbb{K}$ stationnaire nulle. C'est-à-dire qu'un polynôme $P = \sum_{n=0}^p a_n x^n$ au sens où nous l'entendons dans les classes inférieures est défini par la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de ses coefficients. Cette suite est telle que $a_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Notation 2. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Le degré du polynôme est alors l'indice n du dernier coefficient non nul.

Proposition-Définition 3. Soit $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un polynôme. Alors l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Si le polynôme n'est pas le polynôme nul, cet ensemble est non vide ; il admet par conséquent un maximum que l'on appelle le degré de P et que l'on note $\deg(P)$. Si P est le polynôme nul (c'est-à-dire la suite constante nulle), alors on prend par convention $\deg(P) = -\infty$.

Notation 4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n .

Définition 5 (Coefficient dominant). Si $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un polynôme non nul de degré p , on appelle *coefficient dominant* de P , le scalaire a_p . (C'est donc un scalaire non nul).

On dit qu'un polynôme non nul est *unitaire* si son coefficient dominant est égal à 1.

1.2 Bilan : ce qu'un étudiant de PTSI doit savoir

- Un polynôme est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{array}$$

pour un certain entier n et une famille de coefficients $(a_0, \dots, a_n)$.

- Si ce polynôme n'est pas le polynôme constant nul, alors il existe au moins un coefficient qui n'est pas nul. Le degré du polynôme P de la formule précédente est alors le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. L'entier k et la famille $(a_0, \dots, a_k)$ ainsi définie est alors unique.

Autrement dit, deux polynômes sont égaux si et seulement si leur degré et leurs coefficients sont égaux.

- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n .

- Pour deux polynômes $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ deux polynômes, les coefficients du

polynômes $P := AB = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$ se calculent par la formule $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

- Enfin il faut connaître la formule de Taylor que nous donnons sous une forme légèrement différente que lors de sa première apparition :

Proposition 6 (Formule de Taylor en un réel quelconque). Soit n un entier naturel. Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ et pour tout scalaire a , on a la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

2 Propriétés algébriques des polynômes

2.1 Somme et produit

Les règles algébriques de sommes et produits de polynômes sont exactement les mêmes que celles pour les scalaires. Citons les principales :

Proposition 7. Soit P , Q et R trois polynômes et λ et μ deux scalaires. Les règles suivantes s'appliquent :

- | | |
|---|---|
| i) $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P.$ | vi) $PQ = 0 \iff (P = 0 \text{ ou } Q = 0).$ |
| ii) $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q.$ | vii) $(\lambda P)Q = \lambda(PQ) = P(\lambda Q).$ |
| iii) $P + Q = Q + P.$ | viii) $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)Q.$ |
| iv) $PQ = QP.$ | ix) $(PQ)R = P(QR).$ |
| v) $P(Q + R) = PQ + PR.$ | |

2.2 Liens avec le degré

Proposition 8 (degrés et produit externe). Soit P un polynôme et λ un réel Notons $p = \deg(P)$. Le polynôme λP est de degré p si $\lambda \neq 0$ et de degré $-\infty$ si $\lambda = 0$.

Proposition 9 (Degré d'une somme). Soit P et Q deux polynômes de degré respectifs p et q et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors le polynôme $P + Q$ est de degré **au plus** $\max(p, q)$.

Attention ! On peut donc écrire $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ mais l'égalité est fautive en général. Elle est cependant vraie lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$ ou encore lorsque les coefficients dominant de P et de Q ne sont pas opposés.

Corollaire 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Par ailleurs, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de ce sous-espace vectoriel appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 11 (Degré d'un produit). Soit P et Q deux polynômes non nuls. Alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque 12. Si P ou Q est nul, alors la formule précédente reste valable à condition d'utiliser la convention $-\infty + n = -\infty$ pour tout entier n .

Proposition 13 (Coefficients d'un produit de polynômes). Soit $P : x \mapsto \sum_{n=0}^p a_n x^n$ et $Q : x \mapsto \sum_{n=0}^q b_n x^n$ deux polynômes de degrés respectifs p et q , on note $R = PQ$. On sait déjà que R est un polynôme de degré $p + q$ et on note $(c_0, \dots, c_n)$ les coefficients de R , c'est-à-dire $R : x \mapsto \sum_{n=0}^{p+q} c_n x^n$. Alors les coefficients c_n se calculent grâce à la formule suivante :

$$\forall n \in \llbracket 0; p+q \rrbracket, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

3 Propriétés analytiques des polynômes

3.1 Dérivation

Définition 14. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polynôme non nul de degré n . On appelle polynôme dérivée de P et on note P' le polynôme $P' : x \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$. Si P est le polynôme nul, on définit $P' = 0$.

Proposition 15 (Dérivée d'une somme et d'un produit). Soit P et Q deux polynômes et α et β deux réels. Alors :

$$i) (\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'.$$

$$ii) (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Lemme 16 (Degré d'une dérivée). *Soit P un polynôme de degré p . Alors P' est de degré $p-1$ si $p \geq 1$ et P' est le polynôme nul si P est un polynôme constant.*

3.2 Composition des polynômes

Définition 17. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ un polynôme et Q un autre polynôme. On définit le polynôme

$P \circ Q$ comme le polynôme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$. En prenant la convention $Q^0 : x \mapsto 1$.

On peut également utiliser la notation $P \circ Q = P(Q)$.

Comme toujours, la somme contient un nombre fini de termes.

Remarque 18. Bien sûr, cette composition de polynôme est compatible avec la composition des fonctions polynomiales.

Proposition 19 (La composition est linéaire à gauche). *Soit trois polynômes P , Q et R ; alors $(P + Q) \circ R = P \circ R + Q \circ R$*

Attention. La composition n'est pas linéaire à droite ! Considérons $P = X^2$, $Q : x \mapsto x + 2$ et $R = x$. Comparons $P \circ (Q + R)$ et $P \circ Q + P \circ R$.

Lemme 20 (degré d'une composition). *Soit P et Q deux polynômes non constants. Alors, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$.*

Attention ! Attention, lorsque Q est constant, $P \circ Q$ est constant mais peut être le polynôme nul même si Q n'est pas nul.

Proposition 21 (dérivée d'une composée). *Soit P et Q deux polynômes. Alors $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) Q'$.*

4 Propriétés arithmétiques des polynômes

4.1 Diviseurs et multiples

Définition 22. Soient P et Q deux polynômes. S'il existe un polynôme D tel que $P = QD$ alors on dit que P est un multiple de Q ou encore que Q est un diviseur de P . On note parfois $Q \mid P$ pour dire que Q divise P .

Lemme 23. *Si P est un multiple non nul du polynôme Q , alors $\deg(P) \geq \deg(Q)$.*

Proposition 24 (Propriétés élémentaires de la relation de divisibilité). *Soit P , Q et R trois polynômes ainsi que α et β deux réels.*

i) *Si P divise Q et P divise R , alors P divise $(\alpha Q + \beta R)$.*

ii) *Si P divise Q , alors P divise (QR) .*

iii) *Si P divise Q et Q divise R , alors P divise R .*

Exercice 25. Soit P et Q deux polynômes non nuls. À quelle condition nécessaire et suffisante, P est-il à la fois un diviseur et un multiple de Q ?

En particulier montrer que si P et Q sont unitaires, que P divise Q et que Q divise P , alors ils sont égaux.

Maintenant que nous savons chercher des multiples, nous pouvons définir la notion de division euclidienne.

Théorème 26 (Théorème de division euclidienne pour les polynômes). *Soit P un polynôme et D un autre polynôme non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\begin{cases} P = DQ + R \\ \deg(R) < \deg(D) \end{cases}.$$

Ces polynômes Q et R sont alors respectivement appelés quotient et reste dans la division euclidienne de P par D .

4.2 Racines et zéros

4.2.1 Définitions

Définition 27 (Zéro d'un polynôme). On dit qu'un scalaire α est un zéro d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$; autrement dit, si α est un zéro de la fonction polynomiale associée à P .

Définition 28 (Racine d'un polynôme). On dit qu'un scalaire α est une racine d'un polynôme P si P est un multiple de $(X - \alpha)$.

Le miracle de la théorie des polynômes est que ces deux notions de racines et zéros qui semblent très différentes (l'une est purement arithmétique, l'autre est analytique) vont en fait coïncider.

Théorème 29. *Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, alors α est une racine de P si et seulement si c'est un zéro de P .*

Ceci est très intéressant car le nombre de racines d'un polynôme est très contraint.

Proposition 30. *Si P est un polynôme non-nul de degré n . Alors, P admet au plus n racines différentes.*

Nous avons alors un corollaire d'importance **fondamentale** !

Corollaire 31 (Un polynôme qui admet plus de racines que son degré est nul). *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si P est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui admet au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.*

Corollaire 32 (Variantes). *Le corollaire précédent peut s'énoncer sous diverses versions :*

- *Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ qui coïncident en $n + 1$ points distincts. C'est-à-dire s'il existe $n + 1$ scalaire distincts $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ tels que $\forall i \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket, P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$. Alors $P = Q$.*
- *Si P est un polynôme (sans contrainte de degré) qui admet une infinité de racines, alors c'est le polynôme nul.*
- *Si P et Q sont deux polynômes qui coïncident en une infinité de points, alors ils sont égaux.*

4.2.2 Multiplicité des racines

Définition 33. Soit α une racine d'un polynôme P et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une racine de multiplicité m dans P si $(X - \alpha)^m$ divise P mais que $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P .

On dit qu'une racine est simple si elle est de multiplicité égale à 1. On dit qu'elle est multiple dans le cas contraire.

Remarque 34. Par convention, on dit parfois que les multiplicité des racines du polynôme constant nul sont infinies. Le lecteur s'attachera à comprendre en quoi cette convention est compatible avec l'ensemble des résultats suivants.

Proposition 35. *Soit α une racine d'un polynôme P non constant.*

- *Si α est une racine simple de P , alors ce n'est pas une racine de P' .*
- *Si α est une racine multiple de multiplicité $m \geq 2$, alors α est une racine de multiplicité $m - 1$ de P' .*

Corollaire 36. Soit P un polynôme non nul, α une racine de P et m un entier naturel non nul. Alors α est une racine de multiplicité m si et seulement si il existe un polynôme Q vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $P = (X - \alpha)^m Q$

ii) et α n'est pas une racine de Q .

Corollaire 37. Soit P un polynôme non nul, α une racine de P et m un entier naturel non nul. Alors α est une racine de multiplicité m si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P^{(2)}(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$

ii) et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

On peut enfin écrire un dernier lemme qui permet parfois de caractériser la multiplicité d'une racine.

Corollaire 38. Soit P un polynôme non constant et α une racine de P de multiplicité m . Alors α est une racine simple de $P^{(m-1)}$. On peut même écrire

$$m = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \right\}.$$

4.2.3 Le théorème fondamental de l'algèbre

Lemme 39. Soit P un polynôme non nul, alors le nombre de ses racines comptées avec leur multiplicité est inférieur ou égal à son degré.

En fait on peut montrer, c'est un résultat très fort, que l'inégalité précédente est toujours une égalité dans le cas des polynômes complexes. Voici donc le clou du chapitre :

Théorème 40 (Théorème de D'Alembert-Gauss (Admis)). Soit P un polynôme à coefficient complexe non nul de degré n . Alors P possède exactement n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.