

Colles semaine 24

En bref

- Dimension des espaces vectoriels. Cardinal des bases, des familles libres, des familles génératrices.
- Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.
- Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n .
- Rang des familles de vecteurs, notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$. Les opérations élémentaires préservent le rang.
- Dimension des sous-espaces vectoriels.
- Dimension des sommes de sous-espaces vectoriels. Cas des sommes directes. Notion de base adaptée à une somme directe. Formule de Grassmann.
- Rang des applications linéaires. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E et si $f : E \rightarrow F$ est un morphisme d'espaces vectoriels, alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- Théorème du rang : formule dimensionnelle et version géométrique (voir proposition 37).

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'un espace vectoriel E . Montrer que $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) \leq \min(n, \dim(E))$ et étudier les cas d'égalité.
- Montrer que si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$. Citer sans preuve la formule générale si la somme n'est pas directe.
- Soit $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right)$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid 2a + 3b = a + b + c + d = 0 \right\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires et déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
- Montrer que si E est de dimension finie et si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors F est également de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

Note aux colleurs

- Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.
- Nous avons défini dans le cours la notion de famille *échelonnée* sur une autre. C'est bien pratique pour étudier la liberté et/ou le rang des familles. Néanmoins le programme officiel restreint ce vocabulaire uniquement au cas des familles de polynômes échelonnés en degré.
- Le chapitre est dense et probablement difficile. Nous avons encore corrigé assez peu d'exercices pratiques. Il faudra démarrer en douceur.

En détail

1 Théorie de la dimension

Définition 1. On dit qu'un espace vectoriel est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

1.1 Définir la dimension

Théorème 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel (de dimension finie ou non), soit également $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
- ii) La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre maximale de E . C'est-à-dire que toute sur-famille stricte est liée.
- iii) La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice minimale de E . C'est-à-dire qu'aucune sous-famille stricte n'est pas génératrice de E .

Ce théorème admet un corollaire utile

Théorème 3 (Existence de bases en dimension finie). *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

Donnons maintenant un autre résultat primordial concernant le cardinal des familles libres et génératrices.

Lemme 4 (Lemme fondamental). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose que l'on dispose d'un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une famille génératrice de $E : (x_1, \dots, x_n)$. Alors, toute famille de vecteurs de E de cardinal supérieur ou égal à $n + 1$ est liée.

Nous sommes maintenant mûr pour définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition-Définition 5 (Théorème de la dimension). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet au moins une base et toutes les bases de E sont de même cardinal fini. Ce cardinal commun est appelée dimension de E et se note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$, ou simplement $\dim(E)$ lorsque le corps $\mathbb{K}$ est sous-entendu.

Exemple 6. Exemples à connaître :

- i) $\{0\}$ est de dimension 0. (Là encore, on pourra voir cela comme une convention).
- ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est de dimension n .
- iii) $\mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est de dimension 1 ; vu comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, il est de dimension 2.
- iv) $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
- v) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$.
- vi) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.
- vii) L'ensemble des suites réelles u solutions de l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel de dimension 2.
- viii) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie.
- ix) L'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles dérivable, solutions de l'équation différentielle $f' + f = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Exercice 7. Montrer que tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E peut-être muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et qu'alors $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(E)$.

Théorème 8 (Théorème de la base incomplète). *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E . Alors, on peut compléter cette famille en une base de E . Autrement dit, on dispose d'un entier $p \in \mathbb{N}$ et d'une famille $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p})$ de p vecteurs telle que la concaténation $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p})$ soit une base de E .*

Remarque 9. L'entier p du théorème peut être nul, cela correspond au cas où la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est déjà une base.

Remarque 10. Ce théorème admet une version plus précise, parfois utile. À savoir que, si l'on dispose également d'une famille génératrice fixée $(e_1, \dots, e_k)$; alors on peut se restreindre à piocher dans cette famille génératrice pour compléter notre famille libre en une base.

1.2 Cardinal des familles libres et génératrices

Donnons déjà un critère pour trouver une base.

Proposition 11. *Soit E de dimension n et $\mathcal{B}$ une famille de vecteur de E . Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi et dans ce cas, la famille $\mathcal{B}$ est une base de E .*

- i) $\mathcal{B}$ est une famille libre.
- ii) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.
- iii) $\mathcal{B}$ est de cardinal n .

Théorème 12 (Cardinal des familles libres et génératrice). *Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Alors :*

- i) *Les familles libres de E ont toutes un cardinal inférieur ou égal à n . De plus, ce sont des bases si et seulement si leur cardinal vaut exactement n .*
- ii) *Les familles génératrices de E ont toutes un cardinal infini ou supérieur ou égal à n . De plus, ce sont des bases si et seulement si leur cardinal est fini et vaut exactement n .*

1.2.1 Coordonnées dans une base

Proposition-Définition 13. *Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors pour tout vecteur $a \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que*

$a = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Cette famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est appelée les coordonnées du vecteur a dans la base $\mathcal{B}$.

Ces coordonnées sont parfois notées matriciellement $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, pour des raisons qui apparaîtront claires ultérieurement

Remarque 14. Avec les notations précédente, l'application qui à un vecteur de E associe ces coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et $\mathbb{K}^n$.

2 Dimensions et sous-espaces vectoriels

2.1 Utilisation d'un argument dimensionnel à la place d'une inclusion

La dimension permet de donner un critère simple pour prouver que deux espaces vectoriels sont égaux une fois que l'on sait que l'un est inclus dans l'autre.

Proposition 15. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées alors la troisième l'est aussi :*

- i) $F \subset G$
- ii) $G \subset F$
- iii) $\dim(F) = \dim(G)$

2.2 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Lemme 16 (Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels). *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. On a $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$.*

Théorème 17 (Caractérisation des sommes directes). *Soit $n \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi et dans ce cas, F et G sont supplémentaires :*

- i) $F + G = E$
- ii) La somme $F + G$ est directe.
- iii) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

Lorsque la somme de sous-espaces vectoriels n'est pas directe, on a également un résultat sur la dimension de $F + G$:

Proposition 18 (Formule de Grassmann). *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.*

Proposition-Définition 19 (Base adaptée à une somme directe). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. On se donne une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_q)$ de G . Alors la concaténation $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base du sous-espace vectoriel $(F \oplus G)$. Une telle base est dite adaptée à la somme directe $F \oplus G$.*

Corollaire 20 (Existence de supplémentaire). *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors, il existe un supplémentaire de F dans E .*

3 Rang d'une famille

3.1 Définitions et propriétés

Définition 21. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . On appelle *rang* de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ et on note $\text{rg}(x_1, \dots, x_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque 22. Dans cette définition, l'espace ambiant E peut très bien être de dimension infinie.

Lemme 23. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . On a $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p$ avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Lemme 24. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . On a $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq n$ avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E .

Proposition 25. Les opérations élémentaires (permutation, dilatation par un facteur non nul et transvection) préservent le rang.

3.2 Notion de famille échelonnées sur un autre

Définition 26. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E . Soit également une autre famille de cardinal n de E , notée $(y_1, \dots, y_n)$. On dit que la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est *échelonnée* sur la famille $(x_1, \dots, x_n)$ s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$ vérifiant :

$$\begin{array}{llll}
 y_1 & = & \lambda_{1,1}x_1 & \text{avec } \lambda_{1,1} \neq 0 \\
 y_2 & = & \lambda_{2,1}x_1 + \lambda_{2,2}x_2 & \text{avec } \lambda_{2,2} \neq 0 \\
 \vdots & & \vdots & \ddots \\
 y_n & = & \lambda_{n,1}x_1 + \lambda_{n,2}x_2 + \dots + \lambda_{n,n}x_n & \text{avec } \lambda_{n,n} \neq 0
 \end{array} \tag{1}$$

Remarque 27. On prendra garde que cette notion, contrairement à toutes celles présentées dans ce chapitre, dépend de l'ordre des éléments dans les familles. Deux familles échelonnées l'une sur l'autre ont par définition même cardinal.

Lemme 28 (L'échelonnement préserve le Vect). *Soit $\mathcal{F}$ une famille échelonnée sur $\mathcal{G}$. Alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\mathcal{G})$.*

Corollaire 29. *L'échelonnement conserve les propriétés de liberté de d'engendrement ainsi que le rang des familles. Autrement dit :*

- i) *Toute famille échelonnée sur une famille génératrice est génératrice.*
- ii) *Toute famille échelonnée sur une famille libre est libre.*
- iii) *Toute famille échelonnée sur une base est une base.*
- iv) *Si une famille $\mathcal{F}$ est échelonnée sur une famille $\mathcal{G}$; alors $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{G})$.*

Application 30. Cette notion est souvent utilisée dans des espaces de polynômes.

- i) Une famille de polynômes non nuls dont tous les polynômes ont des degrés deux à deux distincts est libre.
- ii) Si n est fixé, une famille de polynômes qui comprend au moins un polynôme de degré k pour chaque entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
- iii) En particulier, si $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de polynôme vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}, \deg P_k = k$; alors c'est une base de $\mathbb{K}_n[x]$. Dans ce dernier cas, on dit que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est *échelonnée en degré*.

4 Rang des applications linéaires

Définition 31 (Rang d'une application linéaire). Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels. On appelle *rang* de f et on note $\text{rg}(f)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Im}(f)$.

Remarque 32. Si $\text{Im}(f)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de dimension finie, on dit simplement que le rang de f est infini.

Proposition 33 (Image d'une famille par une application linéaire). *Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels et soit $\mathcal{C} = (a_1, \dots, a_p)$ une famille de vecteurs de E . On note alors $f(\mathcal{C}) := (f(a_1), \dots, f(a_p))$ la famille de vecteurs de F constituée des images de $\mathcal{C}$.*

- *Si la famille $\mathcal{C}$ est liée, alors $f(\mathcal{C})$ est liée.*
- *Si la famille $\mathcal{C}$ est libre et si f est injective, alors la famille $f(\mathcal{C})$ est libre.*
- *Si la famille $\mathcal{C}$ est génératrice de E , alors la famille $f(\mathcal{C})$ est génératrice de $\text{Im}(f)$.*
- *Si la famille $\mathcal{C}$ est génératrice de E et si la famille $f(\mathcal{C})$ est libre ; alors f est injective*

Corollaire 34. *Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels (avec $\dim(E) = n$) et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.*

Lemme 35. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors F est également de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.*

Proposition 36 (Version géométrique du théorème du rang). *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On se donne H un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E . Alors, la restriction de f à H induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre H et $\text{Im}(f)$.*

Théorème 37 (Théorème du rang dans sa version la plus fréquemment utile). *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors on a la formule :*

$$\dim(\ker f) + \text{rg}(f) = \dim(E)$$

Remarque 38. Ce théorème reste en fait valable si F est de dimension infinie. En revanche, il est crucial que E soit de dimension finie.