

Colles semaine 25

En bref

- Dimension des espaces vectoriels. Cardinal des bases, des familles libres, des familles génératrices.
- Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.
- Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Rang des familles de vecteurs, notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$. Les opérations élémentaires préservent le rang.
- Dimension des sous-espaces vectoriels.
- Dimension des sommes de sous-espaces vectoriels. Cas des sommes directes. Notion de base adaptée à une somme directe. Formule de Grassmann.
- Rang des applications linéaires. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E et si $f : E \rightarrow F$ est un morphisme d'espaces vectoriels, alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- Théorème du rang : formule dimensionnelle et version géométrique (voir proposition ??).
- Caractérisation d'une application linéaire par son image sur une base.
- Étude du rang des composées d'applications linéaires.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'un espace vectoriel E . Montrer que $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) \leq \min(n, \dim(E))$ et étudier les cas d'égalité.
- Montrer que si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$. Citer sans preuve la formule générale si la somme n'est pas directe.
- Soit $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right)$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid 2a + 3b = a + b + c + d = 0 \right\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires et déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
- Montrer que si E est de dimension finie et si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors F est également de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.
- Pour u et w deux applications linéaires compatibles, montrer que $\text{rg}(w \circ u) \leq \text{rg}(w)$. Quid du cas où u est un isomorphisme ?
- Pour u et w deux applications linéaires compatibles, montrer que $\text{rg}(w \circ u) \leq \text{rg}(u)$. Quid du cas où w est un isomorphisme ? *On limitera la preuve au cas où u est définie sur un espace vectoriel de dimension finie.*

Note aux colleurs

- Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.
- Nous avons défini dans le cours la notion de famille *échelonnée* sur une autre. C'est bien pratique pour étudier la liberté et/ou le rang des familles. Néanmoins le programme officiel restreint ce vocabulaire uniquement au cas des familles de polynômes échelonnés en degré.
- Bien que nous terminions à la lisière de cette théorie, nous n'avons encore jamais évoqué la représentation matricielle des applications linéaires.

En détail

1 Théorie de la dimension

Reprise du programme précédent

2 Rang des applications linéaires

Reprise du programme précédent avec en bonus :

Proposition 1 (Une application linéaire est caractérisée par son image sur une base). *Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit également F un espace vectoriel et $(y_1, \dots, y_n)$ une famille de vecteurs de F .*

Alors il existe une et une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, u(e_i) = y_i$.

Corollaire 2 (Provisoirement admis). *Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ aussi et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F$.*

Proposition 3 (Sur le rang des composées). *Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :*

- i) $\text{rg}(w \circ u) \leq \text{rg}(w)$ avec en particulier égalité si u est bijectif (mais pas uniquement dans ce cas).*
- ii) $\text{rg}(w \circ u) \leq \text{rg}(u)$ avec en particulier égalité si w est bijectif (mais pas uniquement dans ce cas).*