

## Colles semaine 26

### En bref

- Dimension des espaces vectoriels. Rang des familles et des applications linéaires (Reprise du précédent).
- Séries numériques. Définition, convergence, somme des séries convergentes.
- Reste des séries convergentes.
- Séries télescopique et lien suite-série.
- Critères de comparaison pour les séries **à termes positifs** : Par majoration exacte, par domination asymptotique ou par équivalent.
- Séries de référence : de Riemann, géométrique et exponentielle.

### Exemples non exhaustifs de questions de cours

*Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.*

- Montrer que si  $E$  est de dimension finie et si  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors  $F$  est également de dimension finie et  $\dim(E) = \dim(F)$ .
- Pour  $u$  et  $w$  deux applications linéaires compatibles, montrer que  $\text{rg}(w \circ u) \leq \text{rg}(w)$ . Quid du cas où  $u$  est un isomorphisme ?
- Pour  $u$  et  $w$  deux applications linéaires compatibles, montrer que  $\text{rg}(w \circ u) \leq \text{rg}(u)$ . Quid du cas où  $w$  est un isomorphisme ? *On limitera la preuve au cas où  $u$  est définie sur un espace vectoriel de dimension finie.*
- Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge (méthode au choix de l'étudiant).
- Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge (méthode au choix de l'étudiant).
- Citer les trois théorèmes de comparaisons de séries positives.

### Note aux colleurs

- Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.
- Tout étudiant qui ne précise pas explicitement l'hypothèse de positivité de la série lorsque c'est nécessaire sera présumé ignorant de son cours et sanctionné en conséquence.
- Tout étudiant qui oserait affirmer après une semaine de cours de séries que « la suite  $u$  tend vers zéro, donc la série  $\sum u_n$  converge » sera voué aux gémonies.
- Attention, pas d'inégalité de Taylor-Lagrange. La formule  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = e^x$  reste donc provisoirement admise.
- Pas d'absolue convergence ni de séries alternées cette semaine. Si on veut étudier une série à termes non positifs, il faut s'assurer qu'elle soit traitable par somme télescopique ou par linéarité

## En détail

### Dimension et Rang

Reprise du programme précédent

### Séries numériques

#### 1 Généralités

**Définition 1.** Soit  $u$  une suite réelle. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la **somme partielle** d'indice  $n$ , notée  $S_n$ , par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée la **série** associée à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou encore *la série de terme général  $u_n$* . On la note parfois  $\sum u_n$ .

**Définition 2.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle ou complexe. On dit que la série  $\sum u_k$  **converge** lorsque la suite des sommes partielles

$$n \mapsto S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

est convergente. La limite de la série s'appelle **la somme de la série** et se note  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ .

**Notation 3.** Lorsqu'un énoncé vous demande d'étudier « la nature » d'une série, il vous faut énoncer si cette série est convergente ou divergente.

**Proposition 4** (Lien suites-série). *Soit  $u$  une suite réelle. On pose alors une nouvelle suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n := u_{n+1} - u_n$ . Alors la suite  $u$  converge si et seulement si la série  $\sum w_n = \sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.*

**Proposition 5.** *Si une suite  $u$  ne converge pas vers zéro (soit qu'elle n'ait pas de limite, soit qu'elle ait une limite non nulle), alors la suite  $\sum u_n$  diverge.*

*Remarque 6.* Lorsqu'une suite  $u$  ne converge pas vers 0, on dit parfois que la série  $\sum u_n$  *diverge grossièrement*

**Attention !** Invoquer la réciproque (fausse en général) de cette proposition est l'une des plus grandes bêtises que vous pouvez écrire sur ce chapitre. Cela est sanctionné de la plus dure des façons par les correcteurs.

Voici la réponse à l'exercice : L'ensemble  $E$  est un espace vectoriel (un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites) et l'application  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $E$ . Et voilà une traduction plus concrète de ce fait

**Proposition 7.** *Si  $u$  et  $v$  sont deux suites telles que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  soient convergentes ; alors, pour tout scalaire  $\lambda$  la série  $\sum (\lambda u_n + v_n)$  est encore convergente et l'on peut écrire :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

**Attention !** L'égalité de la proposition précédente est vraie si chacune des séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  est convergente. En revanche, il se peut que ces séries soient divergentes mais que la série  $\sum (\lambda u_n + v_n)$  soit convergente. On pourra considérer l'exemple de  $u_n = n + 1$ ,  $v_n = n + 1$  et  $\lambda = -1$ .

**Proposition-Définition 8** (Reste d'une série convergente). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dont la série  $\sum u_n$  converge. Alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la suite  $(u_n)_{n > p}$  est une suite dont la série associée est convergente. La somme de cette série est appelée  $p$ -ième reste de la série  $\sum u_n$  et se note  $R_p$ . Autrement dit :

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^p u_n$$

**Lemme 9.** Soit  $u_n$  le terme général d'une série convergente et  $p \mapsto R_p$  la suite de ses restes. Alors  $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$ .

## 2 Les séries à termes positifs

**Proposition 10** (Une remarque de bon sens mais fort utile). Soit  $u$  une suite à valeurs réelles positives. Alors la suite  $n \mapsto S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  est croissante et donc la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si elle est majorée.

### 2.1 Théorèmes de comparaison des séries positives

**Proposition 11** (Comparaison par minoration/majoration). Soient  $u$  et  $w$  deux suites réelles **positives**. Supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq w_n$ , alors :

- i) Si la série  $\sum w_n$  converge, alors la série  $\sum u_n$  converge également.
- ii) Si la série  $\sum u_n$  diverge, alors la série  $\sum w_n$  diverge également.

*Remarque 12.* Bien sûr ceci reste valable si l'hypothèse de majoration n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

On peut évidemment affaiblir ces majorations globales par des majorations seulement asymptotiques :

**Proposition 13** (Comparaison par domination asymptotique ; au programme de deuxième année uniquement). Soient  $u$  et  $w$  deux suites réelles **positives**. Supposons que  $u_n = O(w_n)$ , alors :

- i) Si la série  $\sum w_n$  converge, alors la série  $\sum u_n$  converge également.
- ii) Si la série  $\sum u_n$  diverge, alors la série  $\sum w_n$  diverge également.

**Proposition 14** (Comparaison par équivalent). Soient  $u$  et  $w$  deux suites réelles positives. Supposons que  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} w_n$ , alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum w_n$  sont de même nature.

**Attention !** Les théorèmes de cette section ne sont valides que pour les séries de termes positifs ! Nous verrons en Td des contre-exemples, dans le cas où les séries ne sont pas de signe constant. Employer ces théorèmes, sans se préoccuper du signe des termes de la série constitue la deuxième plus grave erreur de ce chapitre et sera sanctionnée par la même peine que celle évoquée précédemment.

## 3 Quelques séries de référence

### 3.1 Les séries géométriques

Commençons par un cas simple, pour la bonne raison que l'on sait calculer la somme de la série.

**Proposition 15** (Séries géométriques). Soit  $q \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum_n q^n$  est :

- convergente si  $0 \leq |q| < 1$ ,
- divergente (grossièrement) si  $|q| \geq 1$ .

### 3.2 Les séries de Riemann

Étudions un cas légèrement plus compliqué.

**Proposition 16** (Séries de Riemann). *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$  est :*

- *convergente si  $\alpha > 1$ ,*
- *divergente si  $\alpha \leq 1$ .*

### 3.3 Les séries exponentielles

**Proposition 17** (Série exponentielle). *Soit  $x$  un complexe fixé. La série  $\sum \frac{x^n}{n!}$  est convergente et sa somme vaut  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$ .*