

**Colles semaine 28****En bref**

- Dénombrement élémentaires : Nombre de listes, d'arrangements, de sous-ensemble (à cardinal fixé ou non). Nombre d'applications, d'injections.
- Probabilité : axiomatique des espaces probabilisés finis. Notion de système complet d'évènements. Formule des probabilités totales.
- Probabilités conditionnelles : Définition, formule de Bayes, version conditionnelle de la formule des probabilités totales.
- Variables aléatoires. Loi, espérance, variance. Théorème de transfert.
- Lois usuelles : uniformes, de Bernoulli et binomiales.

**Exemples non exhaustifs de questions de cours**

*Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.*

- Montrer la formule du capitaine (c'est-à-dire  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ ) par un raisonnement combinatoire.
- Rappeler la définition de  $\mathbb{P}_B(A)$  si  $A$  et  $B$  sont deux évènements (avec  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ ) et montrer que l'application  $B \mapsto \mathbb{P}_B(A)$  est bien une probabilité.
- Citer et montrer la formule des probabilités totales (version avec intersection et version conditionnelles).
- Définir les loi uniformes et calculer leurs espérances et variances (La méthode vue en cours consiste à se ramener au cas uniforme sur  $\llbracket 0; n \rrbracket$  par translation).
- Définir les loi binomiales et calculer leurs espérances.

**Note aux colleurs**

- Jusqu'à la fin de l'année, on commencera ou terminera la colle en demandant à chaque étudiant de citer un développement limité au programme. On sanctionnera sévèrement en cas d'échec.
- On a défini l'indépendance de variables aléatoires et on a donné une formule pour l'espérance du produit de variables indépendantes mais nous n'avons fait pour le moment aucun exercice sur cette thématique.

## En détail

### 1 Dénombrement

Reprise du programme précédent.

### 2 Axiomatique des probabilités

Reprise du programme précédent

### 3 Variables aléatoires

Dans toute la suite de ce document,  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  désignera un espace probabilisé fini. C'est-à-dire que  $\mathcal{P}(\Omega)$  désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $\Omega$  et que  $\mathbb{P}$  est une probabilité sur  $\Omega$ , au sens défini lors du chapitre idoine.

#### 3.1 Définitions

**Définition 1.** Soient  $\Omega$  l'univers fini d'une expérience aléatoire et  $E$  un ensemble.

Une **variable aléatoire**, notée  $X$ , sur  $\Omega$  à valeurs dans  $E$  est une application  $X : \Omega \rightarrow E$ .

Si  $E = \mathbb{R}$ , alors on dit que  $X$  est une **variable aléatoire réelle** (souvent abrégé en var).

*Remarque 2.* Pour un univers fini, toute application est une variable aléatoire. Lorsque l'on généralisera aux univers infini, on imposera certaines contraintes pour l'application  $X$ .

**Définition 3** (Indicatrice d'un évènement). Soit  $A$  un évènement de l'univers fini  $\Omega$ . L'application

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

est appelée **variable aléatoire indicatrice de  $A$**  et est notée  $\mathbb{1}_A$ .

#### 3.1.1 Ensemble image

**Définition 4.** Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire. L'ensemble image de  $X$ , noté  $X(\Omega)$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui ont au moins un antécédent par  $X$ .

$$X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$

Autrement dit,  $X(\Omega)$  est l'image directe de  $\Omega$  par la fonction  $X$ .

**Notation 5.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et  $x \in \mathbb{R}$ .

— On note  $[X = x]$  l'évènement  $X^{-1}(\{x\})$ . Autrement dit  $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ .

— De manière analogue, on note  $[X \leq x]$  l'évènement  $X^{-1}(]-\infty; x])$ . Autrement dit

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}.$$

— Le lecteur généralisera comme un grand ce qui précède pour définir les notations  $[X < x]$ ,  $[X \geq x]$  et  $[X > x]$ .

**Proposition 6.** Si  $X$  est une variable aléatoire, alors la famille d'évènements  $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$  forme un système complet d'évènements. On l'appelle parfois système complet associé à la variable  $X$ .

### 3.1.2 Opérations sur les variables aléatoire

**Proposition 7.** Soit  $\Omega$  un univers de probabilité. L'ensemble des variables aléatoires réelles sur  $\Omega$  forme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Définition 8.** On définit la **variable aléatoire produit de deux variables aléatoires**  $X$  et  $Y$  par :

$$\forall \omega \in \Omega, XY(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$

**Définition 9.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles définies sur  $\Omega$ .

— Le maximum de  $X$  et de  $Y$  est la variable aléatoire  $Z$  définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$$

On note  $Z = \max(X, Y)$ .

— Le minimum de  $X$  et de  $Y$  est la variable aléatoire  $T$  définie par

$$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$$

On note  $T = \min(X, Y)$ .

**Définition 10.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire et  $f : E \rightarrow F$  une fonction (qui admet  $\mathcal{D}_f$  pour domaine de définition) telle que  $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$ . On définit la variable aléatoire  $f(X) : \Omega \rightarrow F$  comme étant l'application composée  $f \circ X$ . Cette nouvelle variable aléatoire s'appelle parfois variable image de  $X$  par  $f$ .

**Exemple 11.** Si l'on considère  $X$  la variable aléatoire donnant le numéro de la face sur laquelle tombe un dé à 6 faces, et  $f : x \mapsto x^2$ . Alors la variable aléatoire  $f(X)$  est une variable aléatoire réelle dont l'ensemble image vaut  $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ .

## 3.2 Loi d'une variable aléatoire

### 3.2.1 Définition

**Définition 12.** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle. On définit la **loi de  $X$**  comme étant la donnée de deux éléments : l'ensemble  $\mathcal{X}(\Omega)$  et l'application :

$$P_X : \mathcal{X}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$$

**Attention !** Cette définition ne se généralisera pas telle quelle aux cas des univers infinis.

Pour le cas des univers finis, on présente souvent la loi sous forme de tableau.

*Remarque 13.* Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , si  $x \notin \mathcal{X}(\Omega)$ , alors,  $\mathbb{P}(X = x) = 0$ .

**Méthode 14** (Détermination de la loi d'une variable aléatoire). Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, il faut successivement

- 1) déterminer  $\mathcal{X}(\Omega)$  ;
- 2) pour chaque valeur  $x \in \mathcal{X}(\Omega)$ , déterminer  $\mathbb{P}(X = x)$  ;

*Remarque 15.* On a toujours

$$\sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Lorsque l'on a fini de déterminer une loi de probabilité, il est prudent de vérifier que cette propriété est bien vérifiée.

Dans le cas où l'une des valeurs  $\mathbb{P}(X = x)$  est plus difficile à calculer que les autres, on peut aussi penser à utiliser cette propriété.

### 3.2.2 Loi d'une variable image

**Proposition 16.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini et  $f : E \rightarrow F$  une fonction telle que  $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$ . On considère  $Y = f(X)$  la variable aléatoire image de  $X$  par  $f$ .

Alors  $Y(\Omega)$  est l'image directe de l'ensemble  $X(\Omega)$  par la fonction  $Y$ . De plus, pour tout élément  $y \in Y(\Omega)$ , on a

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{\{x \in X(\Omega) / f(x)=y\}} \mathbb{P}(X = x)$$

## 3.3 Espérance d'une variable aléatoire

### 3.3.1 Définitions de l'espérance

**Définition 17.** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur  $\Omega$ . On appelle **espérance** de  $X$ , et on note  $\mathbb{E}(X)$ , le nombre réel défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

**Lemme 18.** Soit  $A$  un évènement de  $\Omega$ . Alors,  $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$ .

### 3.3.2 Propriétés de l'espérance

**Lemme 19.** Soient  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . Alors,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega)$$

**Proposition 20** (Linéarité de l'espérance). L'application, qui, à une variable aléatoire réelle, associe son espérance possède des propriétés de linéarité. Ainsi, pour toutes variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  définies sur  $\Omega$  et tout  $\lambda$  réel, on a

- i)  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- ii)  $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$ .
- iii) Plus généralement,  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$ .

**Corollaire 21.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur un univers de probabilité  $\Omega$  et  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. On pose  $Z = \alpha X + \beta$  qui est bien une variable aléatoire. Alors  $\mathbb{E}(Z) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta$ .

**Proposition 22** (Positivité de l'espérance). Soit  $X$  une variable aléatoire réelle **positive ou nulle** sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ . Alors,

- i)  $\mathbb{E}(X) \geq 0$ ;
- ii)  $\mathbb{E}(X) = 0$  si, et seulement si,  $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ ; on dit dans ce cas que la variable aléatoire  $X$  est **presque-sûrement nulle**.

**Corollaire 23** (Croissance de l'espérance). Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ . Alors, si  $X \leq Y$  (c'est-à-dire que pour toute issue  $\omega$  de  $\Omega$ ,  $X(\omega) \leq Y(\omega)$ ), alors,  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ .

### 3.3.3 Théorème de transfert

**Théorème 24** (Théorème de transfert). Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au moins sur  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de sorte que la variable aléatoire  $f(X)$  existe. Alors,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

### 3.4 Quelques lois usuelles

#### 3.4.1 Variables aléatoires certaines

**Définition 25.** Une variable aléatoire  $X$  est dite presque-sûrement constante s'il existe une valeur  $a$  telle que  $\mathbb{P}(X = a) = 1$ .

**Proposition 26.** Si  $X$  est une variable aléatoire réelle presque sûrement constante égale à  $a$ , alors  $\mathbb{E}(X) = a$  et  $\text{Var}(X) = 0$ .

#### 3.4.2 Lois uniforme

**Définition 27.** Soient  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini et  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs. On dit que  $X$  suit une **loi uniforme** sur  $\llbracket a; b \rrbracket$  et l'on note  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$  si

$$X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket a; b \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

**Proposition 28.** Soit  $X$  une var définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0; n \rrbracket)$ . Alors,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}.$$

**Proposition 29.** Soit  $X$  une var définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ . Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  avec  $a \leq b$ . On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$ . Alors,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}.$$

*Remarque 30.* Soit  $a$  et  $b$  deux entiers avec  $a \leq b$ . Si  $X$  est une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\llbracket 0; b - a \rrbracket$ , alors la variable aléatoire  $Y := X + a$  suit loi uniforme sur  $\llbracket a; b \rrbracket$ .

#### 3.4.3 Lois de Bernoulli

**Définition 31.** Soit  $p \in [0; 1]$ . On dit que  $X$  suit une **loi de Bernoulli** de paramètre  $p$  et l'on note  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  si  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et si :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad (\text{et donc}) \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

**Proposition 32.** Soit  $p \in [0; 1]$ . On suppose que  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Alors,  $\mathbb{E}(X) = p$ .

#### 3.4.4 Lois binomiales

**Définition 33.** Soit  $p \in [0; 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $X$  suit une **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  et l'on note  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  si  $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$  et si :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

**Proposition 34.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0; 1]$ . On suppose que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors,  $\mathbb{E}(X) = np$ .

### 3.5 Variance et moments d'ordres supérieurs

#### 3.5.1 Variance

**Définition 35.** Soit  $X$  une var sur un espace probabilisé fini. On appelle **variance** de  $X$ , et on note  $\mathbb{V}(X)$ , le nombre défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$$

**Proposition-Définition 36.** Pour toute variable aléatoire réelle  $X$  sur un espace probabilisé fini, on a

$$\mathbb{V}(X) \geq 0$$

On appelle **écart-type** de  $X$ , et on note  $\sigma(X)$ , le nombre défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

**Proposition 37** (Calcul pratique de variance). Pour toute variable aléatoire  $X$  sur un espace probabilisé fini, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Cette formule porte parfois le nom de Formule de König-Huygens.

**Proposition 38.** Pour toute variable aléatoire réelle finie  $X$ , on a  $\mathbb{V}(X) \geq 0$ . De plus,  $\mathbb{V}(X) = 0$  si, et seulement si,  $X$  est presque sûrement constante, c'est-à-dire qu'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}(X = m) = 1$ .

**Proposition 39.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $X$  une variable aléatoire réelle finie. Alors,

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

**Définition 40.** Une var  $X$  telle que  $\mathbb{E}(X) = 0$  et  $\mathbb{V}(X) = 1$  est dite **centrée réduite**.

**Proposition-Définition 41.** Si  $X$  est une var de variance non nulle, alors, la variable aléatoire  $X^*$  définie par

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée réduite (c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance égale à 1) appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à  $X$** .

**Proposition 42** (Variances des lois usuelles). Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ;  $n \in \mathbb{N}$  ;  $p \in [0; 1]$  et  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant  $a \leq b$ .

- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0; n \rrbracket)$ , alors  $\text{Var}(X) = \frac{n(n+1)}{12}$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$ , alors  $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)(b-a+1)}{12}$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $\text{Var}(X) = p(1-p)$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $\text{Var}(X) = np(1-p)$ .

### 3.5.2 Moments

**Définition 43.** Soient  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le **moment d'ordre  $k$**  de  $X$ , noté  $\mathbb{M}_k(X)$ , est défini par

$$\mathbb{M}_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$$

*Remarque 44.* On a pour  $X$  une variable aléatoire réelle :  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{M}_1(X)$  et  $\text{Var}(X) = \mathbb{M}_2(X) - (\mathbb{M}_1(X))^2 = \mathbb{M}_2(X - \mathbb{E}(X))$ .

**Proposition 45** (Application du théorème de transfert). Soient  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\mathbb{M}_k(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k \mathbb{P}(X = x)$$