

Colles semaine 28**En bref**

- Variables aléatoires : Reprise du programme précédent, uniquement si on n'a plus d'inspiration pour un exercice d'intégrations.
- Révisions d'intégrations du premier semestre, notamment :
 - Formule d'intégration par parties
 - Formule de changement de variable
 - Intégration de fraction rationnelles.
- Approximations d'un intégrale par des sommes de Riemann.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt$ en toute autonomie.
- Citer le résultat de cours sur les sommes de Riemann (formule sur un segment $[a; b]$ quelconque et sur le segment $[0; 1]$ plus particulièrement) ET illustrer graphiquement ces résultats.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$ en faisant apparaître une somme de Riemann.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{n}\right)$ en faisant apparaître une somme de Riemann.

Note aux colleurs

- On n'a pas beaucoup avancé dans le cours. La seule nouveauté concerne les sommes de Riemann et on n'a même pas eu le temps de prouver ces résultats. On a en revanche fait plusieurs exemples d'application.
Cependant, en testant la connaissance des étudiants à propos des « anciens » cours d'intégration, il me semble qu'on a largement de quoi rentabiliser une heure de colle.
- Si on tombe sur un étudiant qui résout vraiment vite les exercices d'intégrations, on pourra piocher dans un exercice sur les variables aléatoires.

En détail

1 Variables aléatoires

Reprise du programme précédent si nécessaire pour tenir l'heure de colle.

2 Révisions d'intégration du premier semestre

Connaître toutes les formules et méthodes utiles.

3 Et la petite nouveauté : les sommes de Riemann

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on considère les points de subdivision $c_k = a + k \frac{b-a}{n}$. A toute fonction continue f sur $I = [a, b]$, on associe les sommes

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) f(c_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

appelées **sommes de Riemann**.

Proposition 1 (Théorème des sommes de Riemann). *Si f est une fonction continue sur $I = [a; b]$, alors la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_n$, de terme général,*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right), \text{ converge vers } \int_a^b f(t) dt.$$

On remarquera que dans le cas $[a; b] = [0; 1]$, les formules sont plus simples à retenir et que, quitte à faire un changement de variable, on peut toujours se ramener à ce cas particulier.

Proposition 2 (Cas particulier des sommes de Riemann sur $[0; 1]$). *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[0; 1]$, alors la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_n$, de terme général,*

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \text{ converge vers } \int_0^1 f(t) dt.$$