

**Colles semaine 30**

## En bref

- Révisions d'intégrations du premier semestre, notamment :
  - Formule d'intégration par parties
  - Formule de changement de variable
  - Intégration de fraction rationnelles.
- Approximations d'un intégrale par des sommes de Riemann.
- Formules de symétries pour les intégrales de fonctions paires, impaires ou périodiques.
- Inégalité de Taylor-Lagrange.

## Exemples non exhaustifs de questions de cours

*Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.*

- Citer le résultat de cours sur les sommes de Riemann (formule sur un segment  $[a; b]$  quelconque et sur le segment  $[0; 1]$  plus particulièrement) ET illustrer graphiquement ces résultats.
- Étudier l'ensemble de définition, de dérivabilité et la dérivée de  $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x+1} \frac{e^t}{t} dt$ .
- Pour une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  et  $T$ -périodique citer et montrer les formules  $\int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f$  et  $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$  pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .
- Pour une fonction continue sur un intervalle  $I$  symétrique par rapport à zéro et paire (respectivement impaire) citer et montrer les formules liant  $\int_{-a}^a f$ ;  $\int_{-a}^0 f$  et  $\int_0^a f$ .
- Citer un énoncé clair et précis de l'inégalité de Taylor-Lagrange

## Note aux colleurs

- Nous avons cité la formule de Taylor avec reste intégral essentiellement dans le but de prouver l'inégalité de Taylor-Lagrange. La formule avec reste intégral n'est pas exigible en première année.
- Lors de l'utilisation des formules de symétries des intégrales pour les fonctions paires, impaires ou périodiques, on attend des étudiant une illustration graphique de la situation.

## En détail

### 1 Conséquences de la construction de l'intégrale

On rappelle que l'on construit l'intégrale des fonctions en escalier. En utilisant le lemme d'approximation suivant :

**Lemme 1** (Approximation des fonctions continues (Admis)). *Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $\epsilon > 0$ . Il existe  $\phi$  et  $\psi$  en escalier sur  $I$  telles que*

$$\forall x \in I, \phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) - \phi(x) \leq \epsilon$$

on parvient alors à définir l'intégrale des fonctions continues.

**Proposition-Définition 2** (Intégrale d'une fonction continue). *Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ . On considère alors les deux ensembles*

$$\mathcal{I}^+(f) = \left\{ \int_I \Psi / \Psi \in \mathcal{E}(I), f \leq \Psi \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^-(f) = \left\{ \int_I \phi / \phi \in \mathcal{E}(I), \phi \leq f \right\}$$

*On peut montrer que  $\mathcal{I}^+(f)$  admet une borne inférieure, notée  $\beta$ , et que  $\mathcal{I}^-(f)$  admet une borne supérieure, notée  $\alpha$ .*

*La borne inférieure de  $\mathcal{I}^+(f)$  est égale à la borne supérieure de  $\mathcal{I}^-(f)$ . Ce nombre commun est appelé **intégrale** de  $f$  est noté  $\int_I f$ .*

Les conséquences à savoir de cette construction sont résumées ci-après.

#### 1.1 Propriétés de l'intégrale

**Proposition 3** (Linéarité de l'intégrale). *L'intégrale des fonctions continues est une application linéaire. C'est-à-dire que, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  continues sur  $I$ ,*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \int_I (\alpha.f + \beta.g) = \alpha. \int_I f + \beta. \int_I g$$

**Proposition 4** (Positivité et croissance de l'intégration). *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I = [a, b]$ .*

- i) Si  $f \geq 0$ , alors,  $\int_I f \geq 0$ .*
- ii) Si  $f \leq g$ , alors,  $\int_I f \leq \int_I g$ .*
- iii)  $|\int_I f| \leq \int_I |f| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .*

**Définition 5.** Soit  $f$  continue sur  $I = [a, b]$ . On appelle **valeur moyenne** de  $f$  sur  $I$  le nombre

$$\frac{1}{b - a} \int_I f$$

**Proposition 6** (La valeur moyenne est atteinte). *Soit  $f$  une fonction continue sur  $I = [a, b]$ . Il existe  $c \in [a, b]$  tel que*

$$\int_I f = (b - a)f(c)$$

**Proposition 7** (Axiome de séparation des intégrales de fonctions positives). *Soit  $f$  une fonction*

*continue et positive sur  $I = [a, b]$ . Si  $\begin{cases} a < b \\ \forall t \in [a; b], f(t) \geq 0, \\ \text{et } \int_a^b f = 0 \end{cases}$  ; alors  $f$  est constante nulle sur  $[a; b]$ .*

### 1.1.1 Propriétés liées à l'intervalle

**Proposition 8** (Formule de Chasles). Soit  $f$  une fonction continue sur  $I = [a, b]$ . Pour tout  $c \in ]a, b[$ , les restrictions de  $f$  à  $[a, c]$  et à  $[c, b]$  sont continues par morceaux et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} f|_{[c,b]}$$

**Définition 9.** Soit  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application et  $u \in \mathbb{R}$ . On appelle **translatée** de  $f$  par  $u$  la fonction, notée  $f_u$ , définie sur  $[a+u, b+u]$  par

$$\forall x \in [a+u, b+u], \quad f_u(x) = f(x-u)$$

**Proposition 10.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $I = [a, b]$ . Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+u,b+u]} f_u$$

**Corollaire 11.** Soit  $f$  une fonction continue et périodique sur  $\mathbb{R}$  de période  $T$  ( $T > 0$ ). Alors, les intégrales de  $f$  sur un intervalle de longueur  $T$  sont toutes identiques. C'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

De plus, on a

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt.$$

**Définition 12.** Soient  $J$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  et  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **continue par morceaux** sur  $J$  lorsque sa restriction à tout segment  $I \subset J$  est continue par morceaux. On définit alors, pour tous  $a$  et  $b$  éléments de  $J$

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a \leq b \\ - \int_{[a,b]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

**Lemme 13** (Intégrale et parité). Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $f$  une fonction continue sur  $[-a; a]$ . Alors :

- Si  $f$  est paire, alors  $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt = 2 \int_{-a}^0 f(t)dt$ .
- Si  $f$  est impaire, alors  $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ .

## 1.2 Fonctions à valeurs complexes

**Définition 14.** Soit  $I$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue (par morceaux) sur  $I$  à valeurs complexes, alors on définit son intégrale par :

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(f).$$

**Proposition 15.** Les propriétés de linéarité et de Chasles, sont toujours valables pour l'intégrales des fonctions complexes.

**Proposition 16** (Inégalité triangulaire). Soit  $I$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue (par morceaux) sur  $I$  à valeurs complexes, alors :

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

## 2 Lien avec le calcul de primitives

### 2.1 Résultats théoriques

**Théorème 17** (Théorème fondamental de l'analyse). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue. Pour tout  $a \in I$ , l'application*

$$F : x \in J \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

*est l'unique primitive de  $f$  sur  $J$  qui s'annule en  $a$ .*

**Corollaire 18.** *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue. Pour tous  $(a, b) \in I^2$  et toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $J$ , on a*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

**Corollaire 19.** *Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $a \in I$ . Alors,*

$$\forall x \in J, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

### 2.2 Pratique de l'intégration

#### 2.2.1 Intégration par parties

**Proposition 20** (Intégration par parties). *Soit  $I = [a; b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Alors :*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

#### 2.2.2 Changement de variable

**Proposition 21** (Changement de variable). *Soit  $I = [a; b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Soit également  $J$  un segment de  $\mathbb{R}$  tel que  $\varphi(I) \subset J$  et  $f : J \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue sur  $J$ . Alors :*

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

*Remarque 22.* Cette formule est souvent utilisé "de droite à gauche" dans e cas où  $\varphi$  est bijective et où  $f$  est de la forme  $f = g \circ \varphi^{-1}$  pour une fonction  $g$  continue. Alors la formule s'écrit :

$$\int_a^b (g \circ \varphi^{-1})(u)du = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} g(t)\varphi'(t)dt.$$

#### 2.2.3 Primitives des fractions rationnelles

**Méthode 23.** Pour primitiver une fraction rationnelle réelle, on commence par la décomposer en élément simples dans  $\mathbb{R}$  (malheureusement).

Nous devons donc savoir intégrer des termes de types  $\frac{a}{(t - \alpha)^k}$  pour des entiers  $k$  et des réels  $a$  et  $\alpha$ ; ainsi que des termes de types  $\frac{at + b}{(t^2 + \beta t + \gamma)^k}$  pour des entiers  $k$  et des réels  $(a, b, \beta, \gamma)$  vérifiant  $\beta^2 - 4\gamma > 0$  (le polynôme du dénominateur n'a pas de racines réelles.) Voyons donc comment intégrer chacun de ces termes.

**Proposition 24.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ . Alors, si  $k = 1$  :

$$\int \frac{a}{t - \alpha} dt = a \ln(|t - \alpha|) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

et si  $k \geq 2$  :

$$\int \frac{a}{(t - \alpha)^k} dt = -\frac{a}{k-1} \frac{1}{(t - \alpha)^{k-1}} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour les termes correspondant aux polynômes irréductibles de degré deux, on les met d'abord sous forme canonique et par changement de variable affine on se ramène au calcul de l'intégrale de terme de type  $\frac{at + b}{(t^2 + \alpha^2)^k}$  pour des entiers  $k$  et des réels  $a, b$  et  $\alpha$ .

Voyons d'abord le cas où  $k = 1$

**Proposition 25.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\int \frac{2t}{t^2 + \alpha^2} = \ln(|t^2 + \alpha^2|) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

et

$$\int \frac{1}{t^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

On conclut ensuite par combinaison linéaire de ces termes.

**Attention !** Les méthodes qui suivent ne figurent pas officiellement au programme de PT. L'énoncé doit vous guider si un tel calcul est nécessaire.

Pour le cas  $k \geq 2$ , on se ramène par itérations au cas précédent en abaissant le degré de  $k$  puis en utilisant les lemmes suivants.

**Lemme 26.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$  avec  $k \geq 2$ . Alors :

$$\int \frac{2t}{(t^2 + \alpha^2)^k} = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(t^2 + \alpha^2)^{k-1}} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour le terme de type  $\frac{1}{(t^2 + \alpha^2)^k}$ , on écrit  $\frac{1}{(t^2 + \alpha^2)^k} = \frac{1}{(t^2 + \alpha^2)^{k-1}} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{t^2}{(t^2 + \alpha^2)^k}$ , puis on utilise le lemme :

**Lemme 27.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$  avec  $k \geq 2$ . Alors :

$$\int \frac{t^2}{(t^2 + \alpha^2)^k} = \frac{1}{2} \frac{t}{(t^2 + \alpha^2)^{k-1}} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t^2 + \alpha^2)^{k-1}} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

### 3 Formules de Taylor

**Théorème 28** (Formule de Taylor avec reste intégral, Hors programme en première année). Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$ . Alors,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(b) \quad \text{en définissant } R_n(b) := \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

$R_n(b)$  est appelé le reste intégral de la formule de Taylor.

**Théorème 29** (Inégalité de Taylor-Lagrange). Soient  $n \in \mathbb{N}$ ;  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . S'il existe une constante  $M_{n+1}$  vérifiant  $\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ ; alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a + x \in I \implies \left| f(a+x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

*Remarque 30.* Cette inégalité de Taylor-Lagrange est encore valable pour les fonctions à valeurs complexes.

**Théorème 31** (Formule de Taylor-Young). *Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  d'intérieur non vide contenant 0. Alors, pour tout  $x \in I$ ,*

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n).$$

*Remarque 32.* De même, cette formule de Taylor-Young s'étend aux fonctions à valeurs complexes.

*Remarque 33.* La formule de Taylor-Young a ici été écrite au voisinage de 0 dans un souci de simplicité d'écriture. Le lecteur en écrira tout seul une généralisation au voisinage d'un point  $a$  quelconque.

## 4 Sommes de Riemann

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on considère les points de subdivision  $c_k = a + k \frac{b-a}{n}$ . A toute fonction continue  $f$  sur  $I = [a, b]$ , on associe les sommes

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) f(c_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

appelées **sommes de Riemann**.

**Proposition 34** (Théorème des sommes de Riemann). *Si  $f$  est une fonction continue sur  $I = [a; b]$ , alors la suite des sommes de Riemann  $(R_n(f))_n$ , de terme général,*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right), \text{ converge vers } \int_a^b f(t) dt.$$

On remarquera que dans le cas  $[a; b] = [0; 1]$ , les formules sont plus simples à retenir et que, quitte à faire un changement de variable, on peut toujours se ramener à ce cas particulier.

**Proposition 35** (Cas particulier des sommes de Riemann sur  $[0; 1]$ ). *Si  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $[0; 1]$ , alors la suite des sommes de Riemann  $(R_n(f))_n$ , de terme général,*

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \text{ converge vers } \int_0^1 f(t) dt.$$