Colles semaine 31

En bref

- Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Matrice de passages d'une base à une autre. On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases fixées. Lien avec le calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur.
- Formules de changement de bases : pour les matrices représentatives ou pour les coordonnées.
- Notion de rang, de noyau et d'image d'une matrice. Théorème du rang pou les matrices.
- Polynôme d'endomorphisme ou de matrices carrées. Notion de polynôme annulateur.

Exemples de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Définir le range d'une matrice. Montrer que si u est une application linéaire représentée pas une matrice M, montrer que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(u)$.
- Déterminer la matrice représentative de l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P'(1), P(2), \int\limits_0^1 P) \end{array}$ dans les bases canoniques ou un autre exemple du même acabit.
- Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ pour u une application linéaire et x un vecteur de l'ensemble de définition de u.
- Citer les formules de changement de base $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2}(u)P_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_1}$ et en démontrer une au choix.
  Note : les colleurs pourront imposer une autre notation que celles de ce document.

Note aux colleurs

En détails : Représentations matricielles

1 Prologue : retour sur les coordonnées

1.1 Matrice des coordonnées d'un vecteur ou d'une famille de vecteurs

Proposition-Définition 1. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$. Cette famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est appelée* les coordonnées *du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.*

On appelle matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$*, la matrice-colonne suivante :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Définition 2 (Coordonnées d'une famille de vecteur)**.** On se donne encore une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E ainsi qu'une famille $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de E. On appelle alors *matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est constituée de la matrice des coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$. On note cette matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

1.2 Matrice de changement de bases

Définition 3. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 4 (Moyen mnémotechnique pour l'expression des matrices de passage). Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est celle qui correspond à la décomposition des vecteurs de la *nouvelle* base sur *l'ancienne* base. Autrement dit, il convient de penser la matrice de passage de la manière suivante :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \\ e_1 \longleftarrow \\ \vdots \\ e_n \longleftarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & & \cdot \\ & \ddots & \\ \cdot & & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

En effet la première colonne de cette matrice correspond bien à la matrice des coordonnées de e'_1 dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 5. *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de massage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Autrement dit,*

$${P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

2 Représentation matricielle d'endomorphismes

2.1 Définition

Définition 6 (Matrice d'une application linéaire)**.** Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. Soit également $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F =$

$(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. On sait alors que l'on dispose d'une unique famille de scalaires $(m_{i,k})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant j}}$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1\,;\,p]\!],\ g(e_k) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} f_i$$

Alors la matrice

$$M := \begin{pmatrix} m_{1,1} & \ldots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice de l'application g dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On la note généralement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$.

Corollaire 7. *Si g est une application linéaire entre E et F munis des bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et que l'on pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$, alors le format de M dépend des dimensions de E et F. Le nombre de lignes est égal à $\dim(F)$ et le nombre de colonnes à $\dim(E)$.*

La remarque suivante donne un moyen mnémotechnique pour se rappeler comment écrire la matrice d'une application linéaire.

Remarque 8. Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. Soit également $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.

Il convient de penser la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ de la manière suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g) = \begin{array}{c} \\ f_1 \longleftarrow \\ \vdots \\ f_n \longleftarrow \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} g(e_1) & \ldots & g(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}}{\begin{pmatrix} \cdot & & \cdot \\ & \ddots & \\ \cdot & & \cdot \end{pmatrix}}$$

En effet, la première colonne de cette matrice correspond bien aux coordonnées du vecteur $g(e_1)$ décomposé dans la base $(f_1, \ldots f_n)$.

2.2 Action des changements de bases

2.2.1 Représentation matricielle et coordonnées

Proposition 9. *Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit enfin x un vecteur de E. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$ et enfin $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g(x))$. Alors :*

$$Y = MX \quad \text{, autrement dit} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Le point primordial sur les matrices d'application linéaires est exprimé par la proposition suivante :

Proposition 10 (matrices et composition)**.** *Soit E, F et G trois espaces vectoriels munis de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Soit également $f : E \to F$ et $g : F \to G$ une application linéaire. Alors on peut exprimer la matrice de l'application $g \circ f$ par la formule suivante*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$$

2.2.2 Représentation matricielle et changement de bases

Lemme 11. *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est exactement la matrice de l'application* identité *dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Autrement dit :*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E).$$

Proposition 12 (Changement de bases pour les coordonnées). *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et x un vecteur de E. Le lien entre les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et celles dans $\mathcal{B}'$ est donnée à l'aide des matrices de passage par la formule suivante :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

On va maintenant donner la formule de changement de base pour les matrices d'application linéaires :

Proposition 13 (Changement de bases et matrice d'applications linéaires). *Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E ainsi que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Alors, on a l'égalité suivante :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

2.3 Le cas particulier des endomorphismes

Notation 14. Pour un espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$. Autrement dit, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Cette matrice est d'ailleurs appelé simplement matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ sans plus de précision.

Proposition 15 (matrices d'endomorphismes et composition). *Soit E, un espaces vectoriels munis d'une base $\mathcal{B}$ ainsi que f, g deux endomorphismes de E Alors on peut exprimer la matrice de l'application $g \circ f$ par la formule suivante*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

Attention ! Pour les endomorphismes, si l'on connaît les matrices représentatives de f et g dans deux bases différentes, on ne peut pas calculer simplement une matrice de $g \circ f$.

Proposition 16 (Changement de bases et matrice d'endomorphismes). *Soit $g : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit également $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, on a l'égalité suivante :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

3 Conséquences théoriques de ce nouveau point de vue

3.1 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 17. *Soit E un espace vectoriel de dimension p et F un autre espace vectoriel (éventuellement de dimension infinie. Soit également $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille (pas nécessairement une base) de vecteurs de F. Alors il existe une et une unique application linéaire $\varphi : E \to F$ vérifiant :*

$$\forall i \in [\![1\,;\,p]\!],\ \varphi(e_i) = f_i.$$

Proposition 18. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. On se fixe $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une et une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = M$$

Cette application est appelée application linéaire canoniquement associée à M dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

E

Théorème 19. *L'application Φ décrite ci-dessus est un isomorphisme d'espaces vectoriels !*

Corollaire 20 (dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)**.** *Si E et F sont de dimensions respectives p et n, alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension np.*

Définition 21. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'unique application $\varphi_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont la matrices dans les bases canonique des espaces vectoriels $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice A.

Il s'agit tout simplement de l'application

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}.$$

Théorème 22. *Notons $n = \dim(E)$ et donnons nous une bases $\mathcal{B}$ de E. On définit l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$. Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui vérifie de plus*

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2\,,\ \Phi(f \circ g) = \Phi(f)\Phi(g).$$

3.2 Rang des matrices

3.2.1 Définition

Définition 23 (Rappels)**.** Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est défini comme le rang de la famille de ses colonnes (vues comme vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

Le rang d'une application linéaire est défini comme la dimension de son image.

Théorème 24. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F. La matrice de f dans ces bases a le même rang que f.*

Corollaire 25. *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(M) \leqslant \min(n,p)$.*

Théorème 26 (Admis par le programme)**.** *Une matrice et sa transposée ont même rang*

Corollaire 27. *Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est également égal au rang de la famille de ses lignes (vues comme vecteurs de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$).*

3.3 Noyaux et images des matrices

Définition 28. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle noyau (respectivement image) de A et on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau (respectivement l'image) de l'application linéaire canoniquement associée à A définie à la définition 21.

Autrement dit :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}\,.$$

Théorème 29. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F. Soit M la matrice de f dans ces bases. Alors, on a une correspondance entre le noyau de f et celui de M donnée par l'équivalence suivante :*

$$\forall u \in E,\ (u \in \mathrm{Ker}(f)) \iff (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) \in \mathrm{Ker}(M))$$

Proposition 30 (Théorème du rang pour les matrices)**.** *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors* $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = p$

3.3.1 Lien avec l'inversibilité des matrices carrées

Proposition 31. *Soit f un un endomorphisme de E* ***de dimension finie*** *et notons $n = \dim(E)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) L'application f est injective.

ii) L'application f est surjective.

iii) L'application f est bijective.

iv) Il existe une base de E dont l'image par f est encore une base de E.

v) L'image de n'importe qu'elle base de E par f est encore une base de E.

vi) Il existe une base dans laquelle la matrice de f est inversible.

vii) La matrice de f dans n'importe qu'elle base de E est inversible.

viii) Il existe une base dans laquelle la matrice de f est de rang n.

ix) La matrice de f dans n'importe qu'elle base de E est de rang n.

Remarque 32. Si f est un endomorphisme bijectif et $\mathcal{B}$ une base de E, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$$

Corollaire 33. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche ; si et seulement si elle est inversible à droite !*