

Colles (fictives) semaine 2

En bref

- Généralités, traduction logique des propriétés impliquant les antécédents ou images.
- Graphe des fonctions. Interprétation géométrique de la parité, l'imparité et de la périodicité des fonctions.
- Composition des fonctions. Notation $f \circ g$.
- Dérivation, définition (en supposant connue les définitions de limites).
- Calcul de dérivée, d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée de fonction dérivable.
- Étude de la dérivée d'une fonction en vue de tracer l'allure de son graphe.
- Fonction exponentielle définie comme l'unique solution de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (existence admise), propriétés élémentaires.
- Fonction logarithme définie comme réciproque de l'exponentielle. Propriétés de calculs et dérivée.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$ ou $g : x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$ ou tout autre exemple du même genre.
- Tracer le tableau de variations et l'allure du graphe de la fonction $h : x \mapsto (1-x)\sqrt{x}$ ou tout autre exemple de ce style.
- Donner un exemple de deux fonctions croissantes dont le produit n'est pas croissant.
- Donner un exemple de fonction dérivable à dérivée positive qui ne soit pas croissante.
- Citer la formule de dérivation des composées. L'appliquer pour calculer la dérivée de $x \mapsto \cos(\sqrt{2x+1})$.
- Montrer que si f est une fonction strictement monotone ; alors chaque réel admet au plus un antécédent par f .
- Montrer que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

En détail

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 (fonction réelle de la variable réelle). On appelle *fonction à valeurs réelle de la variable réelle* la donnée :

- de E , un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ appelée *ensemble de définition de la fonction* ;
- et pour tout élément x appartenant à E , d'un unique réel appelé *image de x par la fonction*.

Notation 2. Si la fonction se note f , alors on note généralement $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f ; et pour tout élément $x \in \mathcal{D}_f$, on note $f(x)$, l'image de x par la fonction f .

Remarque 3. La donnée de l'ensemble de définition fait normalement partie de la définition de la fonction f . Néanmoins on définit parfois une fonction f à l'aide d'une expression $f(x)$ sans préciser de domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Dans ce cas, il est sous-entendu que $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des x réels pour lesquels l'expression $f(x)$ est bien définie. On dit que c'est le domaine de définition maximal de l'expression $f(x)$.

Méthode 4. Pour déterminer un domaine de définition sous-entendu, il suffit en général (mais pas toujours) de faire attention aux trois problèmes suivants :

- Un dénominateur ne peut être nul. Cas de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4}$.
- L'argument d'une racine carrée doit être positif ou nul. Cas de $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
- L'argument d'un logarithme doit être strictement positif. Cas de $h : x \mapsto \ln(-2x^2 + 6x - 4)$.

Définition 5. Soit f une fonction à valeur réelle définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{D}_f$. Soit également y un réel. Alors on appelle *antécédent de y par f* , tout élément x vérifiant $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) = y$.

Attention ! Évidemment, on ne confondra pas image et antécédent. On remarquera d'ailleurs qu'un élément de l'ensemble de définition d'une fonction admet nécessairement *une et une unique* image. En revanche un réel peut n'admettre aucun, ou un unique, ou plusieurs antécédents par une fonction donnée.

1.2 Composition

Définition 6 (Composition de fonction). Soit E , F et G trois ensembles et $f : E \rightarrow F$ une fonction et $g : F \rightarrow G$ une autre fonction. On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$, la fonction définie ainsi :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

Remarque 7. En général $f \circ g \neq g \circ f$. On remarquera d'ailleurs, selon les domaines de définition, que l'une de ces deux fonctions peut être bien définie sans que la deuxième le soit. Le lecteur dubitatif méditera l'exemple des fonctions $f : x \mapsto -x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

1.3 Sens de variations

Définition 8 (croissance, décroissance, monotonie). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

— On dit que f est croissante sur I si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I^2, (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y)).$$

— On dit que f est strictement croissante sur I si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I^2, (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y)).$$

— On dit que f est décroissante sur I si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I^2, (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y)).$$

— On dit que f est strictement décroissante sur I si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I^2, (x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y)).$$

— On dit que f est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur I .

Proposition 9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone sur I alors chaque réel admet au plus un antécédent par f . C'est-à-dire que la fonction f vérifie l'assertion suivante :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, (f(x) = f(x')) \implies (x = x').$$

On dit dans ce cas que la fonction f est injective. Nous étudierons plus en détail cette notion d'injectivité dans les prochains chapitres.

Corollaire 10. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction strictement monotone sur I . Alors, tout réel admet **au plus** un antécédent par f . C'est-à-dire que si un réel y admet un antécédent par f , alors cet antécédent est unique.

1.4 Point de vue géométrique

Dans toute cette section, on considère le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.4.1 Graphe des fonctions

Définition 11 (Graphe d'une fonction réelle). Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Soit également $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On appelle *graphe* de f ou *courbe représentative* de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ lorsque x parcourt l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

Remarque 12. Avec les notations précédentes, on peut définir de manière équivalente la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$ comme le sous-ensemble du plan défini par :

$$\mathcal{C}_f := \left\{ P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \mid y = f(x) \right\}.$$

1.4.2 Symétrie, parité, imparité

Définition 13 (Parité, imparité). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. C'est-à-dire que $\forall x \in I, -x \in I$. Soit également $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors on dit que :

- f est paire si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$;
- f est impaire si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Exemple 14. La fonction $x \mapsto x^2$ est paire. Plus généralement, pour tout entier n , la fonction $x \mapsto x^n$ est paire si l'entier n est pair et est impaire si n est impair. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire car son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0. La fonction $x \mapsto e^x$ est également ni paire ni impaire bien que son domaine de définition soit symétrique par rapport à 0.

Proposition 15. Soit f une fonction réelle de la variable réelle et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

- La fonction f est paire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est invariante par la symétrie axiale d'axe (Oy) .
- La fonction f est impaire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est invariante par la symétrie centrale de centre O (Ou, c'est la même chose, invariante par la rotation de centre O et d'angle π .)

Définition 16 (fonction périodique). Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est périodique si :

$$\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, (x + T \in E \text{ et } f(x + T) = f(x)).$$

Remarque 17. Un réel strictement positif T vérifiant la condition ci-dessus est appelé une période de f . Si f est périodique, elle admet toujours une infinité de période. Lorsqu'il existe une plus petite période pour la fonction f , on parle parfois abusivement de la période de la fonction.

Exemple 18. Les fonctions sinus et cosinus et tangente sont 2π -périodiques (et également 4π -périodiques, 100π -périodiques, etc.)

La fonction tangente est également π -périodique.

Là encore, cette propriété possède une interprétation géométrique à connaître.

Proposition 19. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que T un réel strictement positif.

La fonction f est T -périodique si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Remarque 20. Si l'ensemble de définition de la fonction n'est pas $\mathbb{R}$ entier, et que la fonction f est T -périodique, alors la translation du graphe de f peut donner un sous-ensemble strict du graphe initial. Prendre l'exemple de la fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{matrix}$ pour s'en convaincre.

1.5 Asymptote

Définition 21 (Asymptote verticale). Soit f une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un réel de sorte que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} = \pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} = \pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Définition 22 (Asymptote horizontale ou oblique). Soit f une fonction définie sur un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. Soit également (a, b) un couple de réel. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

Proposition 23. Pour une fonction f donnée, l'asymptote au voisinage de $+\infty$, si elle existe est unique. Dans ce cas, les paramètres (a, b) de la définition précédente se calculent avec $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

2 Dérivation

Nous admettons que le lecteur est familier avec la notion de limite.

2.1 Définition grossière

Définition 24 (Nombre dérivée). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en a si l'application

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I - \{a\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a . Dans ce cas, cette limite s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Remarque 25. Avec les notations de la définitions précédentes, si f est dérivable en a , on a donc, quitte à changer de variable.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Proposition 26 (Dérivable implique continue). Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors, f est continue en a .

Remarque 27. Attention la réciproque est fausse. Exemple de $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2.2 Règles de calcul

Proposition 28 (Opérations algébriques). Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en un point a de I .

i) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

ii) Le produit fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

iii) Si g ne s'annule pas en a , l'inverse $\frac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a , est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

iv) Si g ne s'annule pas en a , le quotient $\frac{f}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Proposition 29 (Dérivée d'une composition). Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ ainsi que $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

2.3 Tableau de variations

Nous rappelons maintenant l'un des théorèmes fondamentaux sur la dérivation qui sera démontré dans le chapitre idoine.

Théorème 30 (Lien entre sens de variations et signe de la dérivée). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Si f' est une fonction (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I . De même, si f' est (strictement) négative, alors f est (strictement) décroissante.

Attention ! Il est crucial dans le théorème précédent que I soit un intervalle. Pensez à l'exemple de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$.

Ce théorème permet de tracer les tableau de variations des fonctions.

Remarque 31. La convention veut que les flèches de monotonie apparaissant dans les tableaux de variations représentent des monotonies *strictes*.

Remarque 32. La condition de *stricte* croissance énoncée dans le théorème 29 est une condition suffisante mais non nécessaire. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ car elle s'annule en zéro.

Nous essaierons de préciser cela et de donner une condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie pour les fonctions dérivables plus tard dans l'année mais j'invite dès maintenant le lecteur à essayer de formuler par lui-même une telle condition.

3 Fonctions exponentielle et logarithme

3.1 Construction de l'exponentielle

Proposition-Définition 33. On admet l'existence d'une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est en fait unique et on l'appelle « fonction exponentielle ». On la note soit $x \mapsto e^x$, soit $x \mapsto \exp(x)$.

Remarque 34. Nous admettrons l'existence d'une telle fonction. En revanche, nous montrerons qu'elle est unique et nous montrerons les propriétés de cette fonction à l'aide de cette définition.

Proposition 35. La fonction exponentielle a les propriétés suivantes :

- i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\exp x)^n = \exp(nx)$

- v) elle est croissante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies \exp(x) \leq \exp(y)$
- vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$

3.2 Le logarithme népérien

Définition 36. On rappelle l'existence d'une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(f(x)) = x$. On appelle cette fonction « fonction logarithme » et on la note $x \mapsto \ln(x)$. On dit que la fonction logarithme est la fonction réciproque de l'exponentielle.

Lemme 37. La fonction logarithme vérifie l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(\exp(x)) = x$.

Proposition 38. La fonction logarithme a les propriétés suivantes :

- i) $\ln(1) = 0$
- ii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- iv) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln(x)$
- v) elle est croissante : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x \leq y \implies \ln(x) \leq \ln(y)$
- vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- viii) elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$