

Colles semaine 3

En bref

- Asymptote des graphes de fonction : définition et méthode de dérivation.
- Calcul de dérivée, d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée de fonction dérivable.
- Étude de la dérivée d'une fonction en vue de tracer l'allure de son graphe.
- Fonction exponentielle définie comme l'unique solution de $\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$ (existence admise), propriétés élémentaires.
- Fonction logarithme définie comme réciproque de l'exponentielle. Propriétés de calculs et dérivée.
- Extension des fonctions puissances, notation a^b dans le cas $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Citer la formule de dérivation des composées. L'appliquer pour calculer la dérivée de $x \mapsto \cos(\sqrt{2x+1})$.
- Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de $t \mapsto \ln(1+e^t)$.
- Montrer que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.
- En admettant les propriétés de la fonction exponentielle, démontrer les égalités
$$\begin{cases} \ln(1/a) = -\ln(a) \\ \ln(ab) = \ln a + \ln b \end{cases}.$$
- En admettant que le logarithme est dérivable, donner l'expression de sa dérivée.

Notes au colleur

- J'ai pris le parti de définir la fonction exponentielle comme unique solution du problème différentiel $\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$ en admettant l'existence d'une solution (l'unicité a été démontrée). Toutes les propriétés d'exponentielle et logarithme se démontrent à partir de cette définition.

En détail

1 Asymptote des courbes de fonctions

Définition 1 (Asymptote verticale). Soit f une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un réel de sorte que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} = \pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} = \pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Définition 2 (Asymptote horizontale ou oblique). Soit f une fonction définie sur un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. Soit également (a, b) un couple de réel. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

Proposition 3. Pour une fonction f donnée, l'asymptote au voisinage de $+\infty$, si elle existe est unique. Dans ce cas, les paramètres (a, b) de la définition précédente se calculent avec $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

2 Dérivation

Nous admettons que le lecteur est familier avec la notion de limite.

2.1 Définition grossière

Définition 4 (Nombre dérivée). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en a si l'application

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I - \{a\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a . Dans ce cas, cette limite s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Remarque 5. Avec les notations de la définitions précédentes, si f est dérivable en a , on a donc, quitte à changer de variable.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Proposition 6 (Dérivable implique continue). Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors, f est continue en a .

Remarque 7. Attention la réciproque est fausse. Exemple de $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2.2 Règles de calcul

Proposition 8 (Opérations algébriques). Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en un point a de I .

i) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

ii) Le produit fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

iii) Si g ne s'annule pas en a , l'inverse $\frac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a , est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

iv) Si g ne s'annule pas en a , le quotient $\frac{f}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Proposition 9 (Dérivée d'une composition). Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ ainsi que $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

2.3 Tableau de variations

Nous rappelons maintenant l'un des théorèmes fondamentaux sur la dérivation qui sera démontré dans le chapitre idoine.

Théorème 10 (Lien entre sens de variations et signe de la dérivée). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Si f' est une fonction (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I . De même, si f' est (strictement) négative, alors f est (strictement) décroissante.

Attention ! Il est crucial dans le théorème précédent que I soit un intervalle. Pensez à l'exemple de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$.

Ce théorème permet de tracer les tableau de variations des fonctions.

Remarque 11. La convention veut que les flèches de monotonie apparaissant dans les tableaux de variations représentent des monotonies strictes.

Remarque 12. La condition de stricte croissance énoncée dans le théorème 10 est une condition suffisante mais non nécessaire. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ car elle s'annule en zéro.

Nous essaierons de préciser cela et de donner une condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie pour les fonctions dérivables plus tard dans l'année mais j'invite dès maintenant le lecteur à essayer de formuler par lui-même une telle condition.

3 Exponentielle, logarithme, puissance

3.1 Construction de l'exponentielle

Proposition-Définition 13. On admet l'existence d'une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est en fait unique et on l'appelle « fonction exponentielle ». On la note soit $x \mapsto e^x$, soit $x \mapsto \exp(x)$.

Remarque 14. Nous admettrons l'existence d'une telle fonction. En revanche, nous montrerons qu'elle est unique et nous montrerons les propriétés de cette fonction à l'aide de cette définition.

Proposition 15. *La fonction exponentielle a les propriétés suivantes :*

- i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\exp x)^n = \exp(nx)$
- v) *elle est strictement croissante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \implies \exp(x) < \exp(y)$*
- vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$

3.2 Le logarithme népérien

Définition 16. On rappelle l'existence d'une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(f(x)) = x$. On appelle cette fonction « fonction logarithme » et on la note $x \mapsto \ln(x)$. On dit que la fonction logarithme est la fonction réciproque de l'exponentielle.

Lemme 17. *La fonction logarithme vérifie l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(\exp(x)) = x$.*

Proposition 18. *La fonction logarithme a les propriétés suivantes :*

- i) $\ln(1) = 0$
- ii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- iv) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln(x)$
- v) *elle est strictement croissante : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x < y \implies \ln(x) < \ln(y)$*
- vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- viii) *elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$*

3.3 Calcul des puissances

Définition 19. Soit a un réel **strictement positif** et b un réel quelconque, alors on définit le nombre a^b comme :

$$a^b := \exp(b \ln a).$$

Remarque 20. On savait déjà définir a^b lorsque l'exposant b est entier. Il faut bien sûr montrer que ces deux définitions coïncident. En fait on connaît trois cas (non incompatibles) dans lesquels on peut définir a^b :

- Si b est un entier strictement positif et a un réel (ou complexe) quelconque,
- Si b est un entier négatif ou nul et que a est un réel (ou complexe) non nul,
- Si b est un réel quelconque et a est un réel strictement positif.

Notons enfin que l'on pose souvent par convention que $0^0 = 1$ bien que cela ne soit pas automatique et entraîne parfois des soucis de continuité de certaines fonctions.

Proposition 21 (Règle de calculs). *Pour x, y deux réels **strictement positifs** et α, β deux réels, on peut écrire :*

- i) $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$.
- ii) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
- iii) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
- iv) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Remarque 22. Ces règles de calculs sont également valables pour des réels x et y négatifs avec des exposants α et β entiers. En revanche, on prendra garde de ne pas « mélanger les cas » de la remarque 20. Le lecteur méditera à cet effet la non-égalité suivante :

$$-1 \neq [(-1)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

3.4 Croissance comparée

Proposition 23 (Résumé des résultats de croissances comparées). *Les limites suivantes doivent être connues :*

- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$
- ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

et les résultats suivants (pour α et β deux réels **strictement positifs**) doivent s'en déduire :

- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha (e^{-x})^\beta = 0$
- ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty$
- iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$
- iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$
- v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
- vi) et pour $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0$