

Colles semaine 3

En bref

- Fonction exponentielle définie comme l'unique solution de $\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$ (existence admise), propriétés élémentaires.
- Fonction logarithme définie comme réciproque de l'exponentielle. Propriétés de calculs et dérivée.
- Extension des fonctions puissances, notation a^b dans le cas $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Intégration, formules de calculs :
 - Linéarité
 - Chasles
 - Intégrations par parties
 - Changement de variable
- Intégration, résultats théoriques :
 - Unicité des primitives à constante près sur un intervalle.
 - Croissance et positivité de l'intégration.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- En admettant les propriétés de la fonction exponentielle, démontrer les égalités

$$\begin{cases} \ln(1/a) = -\ln(a) \\ \ln(ab) = \ln a + \ln b \end{cases}.$$
- Tracer sans justification les courbes représentatives des fonctions $t \mapsto t^a$ en faisant les disjonctions de cas nécessaires.
- Admettant la formule de dérivation du logarithme, déterminer l'ensemble des primitives de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$.
- Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.
- Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$ à l'aide du changement de variable $x = \sin t$.
- Appliquer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})$.

Notes au colleur

- On s'assurera que tous les étudiantes et étudiants ont à un moment ou l'autre de la colle un changement de variable à effectuer dans un intégrale.
- J'ai encore fait très peu d'exemples d'intégrales de fractions rationnelles. Ceux qui collent le lundi éviteront ce thème ou alors devront guider chaque étape.

En détail

1 Exponentielle, logarithme, puissance

Reprise du programme précédent

2 Intégration

Définition 1 (Primitives). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction sur I . On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Théorème 2 (Existence de primitives (Admis pour le moment)). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I . Alors f admet des primitives sur I . De plus, toutes ces primitives diffèrent par une constante. C'est-à-dire que si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I , alors la fonction $F_1 - F_2$ est constante sur I .

Théorème 3 (Théorème fondamental de l'analyse). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $a \in I$, l'application

$$F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur J qui s'annule en a .

Corollaire 4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tous $(a, b) \in I^2$ et toute primitive F de f sur J , on a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

On notera souvent $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Proposition 5 (Linéarité de l'intégrale). Soit $I = [a; b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions sur I . Pour tous réels α et β , on peut écrire :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Proposition 6 (Formule de Chasles). Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Pour tout $c \in]a, b[$, on a l'égalité suivante

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Lemme 7 (positivité de l'intégration). Soit $I = [a; b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ (ce qui implique $a \leq b$) et f une fonction continue et positive sur I . Alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Corollaire 8 (croissance de l'intégration). Soit $I = [a; b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ (ce qui implique $a \leq b$) ainsi que f et g deux fonctions continues sur I .

Si les fonctions f et g vérifient $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$; alors on a $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

2.1 Intégration par parties

Proposition 9 (intégration par parties). *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un segment $I = [a; b]$ et à dérivées continues. Alors,*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

2.2 Changement de variables

Théorème 10 (Changement de variable dans une intégrale). *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit Φ une fonction dérivable sur I , de dérivé continue et à valeur dans J et f continue sur J . Alors, pour tous $(a, b) \in I^2$,*

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(u)du = \int_a^b (f \circ \Phi)(t) \Phi'(t)dt.$$