

Colles semaine 5

En bref

- Intégration, formules de calculs :
 - Linéarité
 - Chasles
 - Intégrations par parties
 - Changement de variable
- Intégration, résultats théoriques :
 - Unicité des primitives à constante près sur un intervalle.
 - Croissance et positivité de l'intégration.
- Géométrie du plan, équations cartésiennes et paramétriques de droites. Vecteur directeur, vecteur normal, produit scalaire.
- Projection orthogonale sur une droite. Théorème de meilleure approximation, distance d'un point à une droite.
- Équations cartésienne et paramétriques de droites.
- Rappels sur les formules de trigonométrie.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.
- Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$ à l'aide du changement de variable $x = \sin t$.
- Appliquer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})$.
- Après avoir rappelé la signification logique précise de « la droite Δ a pour équation $2x - 3y + 1 = 0$. » déterminer le projeté orthogonal du point $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur Δ . *On pourra évidemment modifier les valeurs numériques.*
- Définir le projeté orthogonal d'un point A sur une droite et montrer que c'est l'unique point minimisant la distance entre A et la droite.
- Décrire précisément la nature géométrique de l'ensemble suivant *On pourra évidemment modifier les valeurs numériques.* :

$$\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 2x^2 + 8x + 2y^2 - 12y + 18 = 0 \right\}.$$

Notes au colleur

- On s'assurera que tous les étudiantes et étudiants ont à un moment ou l'autre de la colle un changement de variable à effectuer dans un intégrale.
- Les étudiants sont maintenant des experts dans l'intégration des fractions rationnelles à dénominateur de degré 2 factorisable dans $\mathbb{R}$. (La fonction arctan n'a pas été vue).
- Nous n'avons encore corrigé aucun exercice de trigonométrie spécifique. Les formules de trigo figurent au programme uniquement dans le but de pouvoir simplifier certaines intégrales. Mais les étudiants ne sont pas censés être autonome sur les méthodes classiques de linéarisation.

En détail

1 Intégration

Reprise du programme précédent

2 Géométrie affine du plan

2.1 Équations de droite

On rappelle un des axiome fondamental

Axiome 1. Soit A et B deux points distincts, alors il existe une et une seule droite passant par les points A et B . On note cette droite (AB) .

Cette droite est définie comme l'ensemble des points C tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

On dit alors que la droite (AB) est parallèle au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Corollaire 1. Les vecteurs portés par une même droite sont tous colinéaires entre eux.

Proposition-Définition 2. Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors, il existe une et une unique droite passant par A et parallèle au vecteur $\vec{u}$. On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Remarque 3. Une droite admet toujours une infinité de vecteurs directeurs. Plus précisément, si Δ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, alors l'ensemble des vecteurs directeurs de Δ est exactement l'ensemble des vecteurs non nuls et colinéaires à $\vec{u}$.

Dans le cas où le vecteur directeur n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées on peut alors définir un coefficient directeur.

Proposition-Définition 4. Soit Δ une droite du plan. Deux cas incompatible peuvent se présenter :

- Soit tous les vecteurs directeurs de Δ ont une abscisse nulle, dans ce cas, la droite Δ est dite verticale.
- Soit tous les vecteurs directeurs de Δ ont une abscisse non nulle. Dans ce cas, pour tout vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le quotient $\frac{b}{a}$ est constant et s'appelle le coefficient directeur de la droite.

Proposition 5 (Équations cartésienne de droites). Soit Δ une droite du plan. Alors il existe un triplet de réels (a, b, c) de sorte que $(a, b) \neq (0, 0)$ et que pour tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on ait l'assertion suivante :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \iff ax + by + c = 0.$$

Remarque 6. Si (a, b, c) est un tel triplet (il n'est jamais unique), on dira que Δ est la droite d'équation $ax + by + c = 0$. En outre si jamais, le réel b est non nul, il est courant d'écrire l'équation de droite sous la forme équivalente suivante $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Dans ce cas, le coefficient directeur de la droite est alors égal à $-\frac{a}{b}$.

Proposition 7 (Équations paramétriques de droites). Soit Δ une droite du plan. Alors il existe un et un unique quadruplet de réels $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de sorte que $(\alpha, \gamma) \neq (0, 0)$ et que pour tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on ait l'assertion suivante :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \iff \left(\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \gamma t + \delta \end{cases} \right).$$

Remarque 8. Si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est un tel quadruplet (il n'est pas unique), alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite. Si de plus $\alpha \neq 0$, alors le coefficient directeur de la droite est égal à $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Théorème 9. Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts du plan. Alors la droite (AB) a pour équation cartésienne :

- i) $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$ si $x_B - x_A \neq 0$;
- ii) $x = x_A$ si $x_A = x_B$ (cas d'une droite verticale).

Un système d'équation paramétrique de la droite (AB) est donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \iff \left(\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \end{cases} \right).$$

2.2 Orthogonalité et produit scalaire

Définition 10. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{w}$ et on note $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ (ou parfois $\vec{u} \cdot \vec{w}$ le réel :

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = x_u x_w + y_u y_w$$

Définition 11. Soit $\vec{u}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs, on dit qu'ils sont *orthogonaux* si $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$.

Proposition-Définition 12. Soit Δ une droite. Alors il existe un vecteur $\vec{n}$ tel que pour tout point $A \in \Delta$, on puisse caractériser Δ par l'équation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \iff \langle \vec{AM}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Un tel vecteur $\vec{n}$ est nécessairement non nul, n'est jamais unique et s'appelle un *vecteur normal* de Δ . Dans ce cas, on dit aussi que Δ est *orthogonale* à $\vec{n}$.

Remarque 13. Si $\vec{n}$ est un vecteur normal de Δ , alors l'ensemble des vecteurs normaux de Δ est l'ensemble des vecteurs **non nuls** colinéaires à $\vec{n}$. Autrement dit, c'est l'ensemble $\{k\vec{n} \mid k \in \mathbb{R}^*\}$.

Proposition-Définition 14. Soit Δ et Δ' deux droites du plan. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe $\vec{n}$ un vecteur qui est à la fois vecteur normal de Δ et vecteur directeur de Δ' .
- ii) Il existe un vecteur $\vec{n}$ normal de Δ et un vecteur $\vec{n}'$ normal de Δ' tel que $\langle \vec{n}, \vec{n}' \rangle = 0$.
- iii) Il existe un vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ et un vecteur $\vec{u}'$ directeur de Δ' tel que $\langle \vec{u}, \vec{u}' \rangle = 0$.

- iv) $\forall (A, B) \in \Delta^2, \forall (C, D) \in \Delta'^2, \langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle = 0$.

Si ces assertions sont vérifiées, les droites Δ et Δ' sont dites *perpendiculaires* ou *orthogonales* et on note $\Delta \perp \Delta'$.

2.3 Projections et symétries orthogonales

Proposition-Définition 15. Soit Δ une droite et A un point du plan. Alors, il existe un et un unique point H vérifiant : $\begin{cases} H \in \Delta \\ (AH) \perp \Delta \end{cases}$. Ce point H s'appelle projeté orthogonal de A sur Δ .

Définition 16. Soit Δ une droite. On appelle symétrie orthogonale d'axe Δ , l'application qui à tout point A du plan associe le point $B = A + 2\overrightarrow{AH}$ où H désigne le projeté orthogonal de A sur Δ .

Remarque 17. Pour une droite Δ , l'ensemble des points invariants par la symétrie orthogonale d'axe Δ est exactement la droite Δ . Autrement dit, si on note s la symétrie orthogonale d'axe Δ , alors on a :

$$\Delta = \{A \in \mathcal{P} \mid s(M) = M\}$$

3 Définition des fonctions de trigonométrie élémentaires

Définition 18. On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan muni du cercle trigonométrique (c'est-à-dire le cercle de rayon 1 dont le centre est l'origine du repère). On note A le point de coordonnée $(1, 0)$. Pour tout réel x , on associe un point M situé sur le cercle trigonométrique, de sorte que l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ soit de mesure x .

On définit alors le cosinus de x , noté $\cos(x)$, comme l'abscisse de ce point M .

On définit également le sinus de x , noté $\sin(x)$, comme l'ordonnée de ce point M .

Si de plus $\cos(x) \neq 0$, alors on définit la tangente de x par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Lemme 19 (Interprétation géométrique de la tangente). Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ on considère le point M de $\mathcal{C}$ tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Soit T le point d'intersection entre la droite (OM) et la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point A . On appelle **tangente de x** et on note $\tan(x)$ l'ordonnée de T dans le repère $\mathcal{R}$.

4 Équations de cercle

Proposition 20 (Présentation paramétrique des cercle). Soit $A(x_a, y_a)$ un point du plan et r un réel positif, on note alors $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r . Une présentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donnée par l'assertion suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M(x, y) \in \mathcal{C} \iff \left(\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = x_a + r \cos(t) \\ y = y_a + r \sin(t) \end{cases} \right). \quad (1)$$

Proposition 21 (Équation cartésienne d'un cercle). Soit $A(x_a, y_a)$ un point du plan et r un réel positif, on note alors $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r . Une équation cartésienne du cercle est alors donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M(x, y) \in \mathcal{C} \iff (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 - r^2 = 0.$$

5 Propriétés des fonctions trigonométriques

Toutes les propriétés suivantes sont admises mais il est intéressant de savoir le redémontrer.

Proposition 22 (Propriété du cosinus). *La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π , dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto -\sin(x)$.*

Proposition 23 (Propriété du sinus). *La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, périodique de période 2π , dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \cos(x)$.*

Proposition 24 (Propriété de la tangente). *La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est définie sur tous les intervalles de type $]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$, impaire, périodique de période π , dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.*

5.1 Formules figurant explicitement au programme

Proposition 25 (Corollaire du théorème de Pythagore). $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Proposition 26 (Formule d'addition). *Pour tout réels a et b , on a :*

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \cos a \sin b + \sin a \cos b.\end{aligned}$$

Corollaire 27. *Les formules qui suivent sont des cas particuliers à connaître des formules d'addition.*

i) *Changement de signe dans les formules d'addition :*

$$\begin{aligned}\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a-b) &= -\cos a \sin b + \sin a \cos b.\end{aligned}$$

ii) *Formules de symétrie axiales :*

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}, \cos(-a) &= \cos(a) \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}, \\ \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \text{ et } \sin(\pi - a) = -\sin(a) \\ \forall a \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin(a) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)\end{aligned}$$

iii) *Formules de rotation :*

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}, \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \text{ et } \sin(\pi + a) = -\sin(a) \\ \forall a \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= -\sin(a) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)\end{aligned}$$

iv) *Formules de duplication :*

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}, \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \forall a \in \mathbb{R}, \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)\end{aligned}$$