

Colles semaine 6

En bref

- Géométrie du plan, équations cartésiennes et paramétriques de droites. Vecteur directeur, vecteur normal, produit scalaire.
- Projection orthogonale sur une droite. Théorème de meilleure approximation, distance d'un point à une droite.
- Équations cartésienne et paramétriques de droites.
- Rappels sur les formules de trigonométrie.
- Formules de linéarisation et application aux calculs d'intégrales.
- Expression des fonctions trigonométriques à l'aide de la tangente de l'arc moitié.
- Savoir retrouver les formules de factorisation (énoncé hors-programme, il faut guider) et application à la résolution de certaines équations.
- Un point sur les méthodes classiques de raisonnement : Analyse-synthèse, par récurrence, par l'absurde.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Après avoir rappelé la signification logique précise de « la droite Δ a pour équation $2x - 3y + 1 = 0$. » déterminer le projeté orthogonal du point $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur Δ . On pourra évidemment modifier les valeurs numériques.
- Définir le projeté orthogonal d'un point A sur une droite et montrer que c'est l'unique point minimisant la distance entre A et la droite.
- Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x/2) \neq 0$, démontrer les formules permettant d'exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $t := \tan(x/2)$.
- Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$ après avoir linéarisé l'intégrande.
- Démontrer par l'absurde l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
- Montrer que pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, il existe un unique couple de fonction (p, i) vérifiant
$$\begin{cases} p \text{ est paire} \\ i \text{ est impaire} \\ f = p + i \end{cases}.$$

Notes au colleur

- La méthode permettant de transformer des expression de type $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t + \varphi)$ a bien été vue. *Contrairement aux PTSI1 si mes souvenirs sont bons.*
- Pour la décomposition de toute fonction en somme de fonction paire et impaire, la correction en classe fut faite pour l'exemple de la fonction exponentielle (au lieu de toute fonction f). Après discussion avec les étudiantes et étudiants, ces derniers ont convenu qu'ils sauraient adapter à une preuve générale pour toute fonction f .

En détail

1 Trigonométrie

Reprise du programme précédent, notamment :

1.1 Rappels de formules à connaître

Proposition 1 (Corollaire du théorème de Pythagore). $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Proposition 2 (Formule d'addition). *Pour tout réels a et b , on a :*

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b.$$

Corollaire 3. *Les formules qui suivent sont des cas particuliers à connaître des formules d'addition.*

i) *Changement de signe dans les formules d'addition :*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a - b) = -\cos a \sin b + \sin a \cos b.$$

ii) *Formules de symétrie axiales :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \cos(-a) = \cos(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a) \text{ et } \sin(\pi - a) = \sin(a)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$$

iii) *Formules de rotation :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \cos(\pi + a) = -\cos(a) \text{ et } \sin(\pi + a) = -\sin(a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$$

iv) *Formules de duplication :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Proposition 4 (Formules de linéarisations). *Pour tout réels a et b :*

$$i) \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

$$ii) \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$

$$iii) \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

Proposition 5 (Formules d'addition pour la tangente). *Pour deux réels a et b :*

$$i) \text{ Si } a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ et si } a - b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

$$ii) \text{ Si } a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ et si } a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi], \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Corollaire 6 (Formule de duplication pour la tangente). *Pour tout réel a , si $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et si $a \neq \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$, alors $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$.*

Proposition 7 (Expressions en fonction de la tangente de l'angle moitié). *Si $a \neq \pi[2\pi]$, en posant $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, on a :*

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \quad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$$

et si de plus, $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a :

$$\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

2 Principes logiques

Proposition 8 (Principe de contraposition). *Quelles que soient les valeurs de vérité des propositions P et Q , alors les assertions suivantes sont équivalentes (c'est-à-dire elles ont même valeur de vérité) :*

$$i) P \implies Q$$

$$ii) (\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$$

Proposition 9 (Principe de raisonnement par l'absurde). *Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : Pour toute assertion P , on a l'implication : $(P \implies \text{FAUX}) \implies (\text{non } P)$.*

Proposition 10 (Négation d'une assertion quantifiée). *Soit $P(x)$ un prédicat et E un ensemble. Le contraire de l'assertion :*

$$\forall x \in E, P(x)$$

est l'assertion

$$\exists x \in E, (\text{non } P(x))$$

Axiome 1 (Schéma d'axiomes de récurrence). *Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat dépendant d'une variable libre n de type entier. On suppose que les deux assertions suivantes sont vraies :*

$$i) \mathcal{P}(0)$$

$$ii) \forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$$

Alors l'assertion $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie aussi.

Méthode 11 (Raisonnement par analyse-synthèse). Soit $P(x)$ un prédicat dépendant d'une variable libre x et supposons que l'on cherche à établir l'existence et l'unicité d'un élément x_0 (x_0 étant au départ inconnu). vérifiant $P(x_0)$. On peut procéder par analyse-synthèse.

- En phase d'*analyse*, on montre que si x vérifie $P(x)$, alors nécessairement $x = x_0$ (la valeur x_0 étant précisément trouvée lors de cette phase d'analyse). Ceci établit l'unicité de x .
- En phase de *synthèse*, on vérifie que la valeur x_0 vérifie effectivement $P(x_0)$. Cela établit l'existence de x cherché.