

Colles semaine 7

En bref

- Un point sur les méthodes classiques de raisonnement : Analyse-synthèse, par récurrence, par l'absurde.
- Calcul de sommes/produits.
 - Formules exprimant $\sum_{k=0}^n k$; $\sum_{k=0}^n k^2$ et $\sum_{k=0}^n q^k$.
 - Factorisation, développement, permutation de termes dans les sommes.
 - Identité remarquable de factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
 - Factorisation, coefficients binomiaux et formules du binôme de Newton.
 - Exemples de sommes doubles, de sommes triangulaires.
- Exemples pratiques de résolution de systèmes linéaires.

Exemples de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Démontrer par l'absurde l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
- Montrer que pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, il existe un unique couple de fonction

$$(p, i) \text{ vérifiant } \begin{cases} p \text{ est paire} \\ i \text{ est impaire} \\ f = p + i \end{cases} .$$

- Déterminer une expression de u_n lorsque u est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \end{cases} .$

(Conjecture +récurrence forte).

- Citer et démontrer la formule pour calculer $\sum_{k=0}^n q^k$.
- Citer la formule du binôme. L'appliquer pour calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
- Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

Notes au colleur

Cette semaine, nous ferons colle en trois temps :

- D'abord une question de cours parmi les exemples ci-dessus.
- Puis un système à résoudre. *On évitera toute question théorique sur les systèmes, on veut juste vérifier que les étudiants savent se ramener à un système triangulaire/échelonné par pivot de Gauss.*
- Dans le temps restant, on pourra poser un exercice de son choix.

En détail

1 Principes logiques

Reprise du programme précédent

2 Calculs de sommes

2.1 Exemples à connaître

Proposition 1 (Sommes arithmétiques et géométriques). *Pour tout entier naturel n , on a :*

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} ; .$$

Plus généralement si a est une suite arithmétique et n et m deux entiers naturels vérifiant $n \leq m$, alors :

$$\sum_{k=n}^m a_k = \frac{(m-n+1)(a_n + a_m)}{2} ; .$$

Pour tout nombre réel q ,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Proposition 2. *Pour tout entier naturel n , on a :*

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; .$$

2.2 Règles de calcul

Proposition 3 (Factorisation et développement). *Soit (a_k) et (b_k) deux suites de réels et m et n des entiers naturels vérifiant $m \leq n$. Alors :*

$$i) \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k.$$

ii) *Soient λ un nombre réel, $l \in \mathbb{N}$, alors,*

$$\sum_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k.$$

$$\sum_{k=m}^n (a_k + \lambda) = \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) + (n-m+1)\lambda.$$

Proposition 4 (Règle de Chasles pour les sommes). *Soient p , q et r trois entiers naturels tels que $p < r < q$ et a une suite de réels, alors :*

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^r a_k + \sum_{k=r+1}^q a_k = \sum_{k=p}^{r-1} a_k + \sum_{k=r}^q a_k.$$

Exemple 5. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$ pour tout entier naturel n .

2.3 Changement d'indices

Méthode 6 (Décalage d'indice). Soient p, q et r des entiers avec $p \leq q$. On dit que l'on fait un décalage d'indice dans la somme $S = \sum_{k=p}^q a_k$, si l'on considère un nouvel indice $j = k + r$.

1. On a donc défini le nouvel indice j par $j = k + r$.
2. On peut écrire la relation réciproque $k = j - r$.
3. Ainsi dans la somme, le terme générique a_k devient a_{j-r} . Et les bornes $k = p$ et $k = q$ deviennent respectivement $j = p + r$ et $j = q + r$.

On peut donc écrire : $S = \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}$.

Méthode 7 (Symétrisation). Soient p, q et r des entiers avec $p \leq q$ et $S = \sum_{k=p}^q a_k$. On dit que l'on fait une symétrisation d'indice lorsque :

1. On définit un nouvel indice j par $j = q - k$.
2. On peut écrire la relation réciproque $k = q - j$.
3. Ainsi dans la somme, le terme générique a_k devient a_{q-j} . Et les bornes $k = p$ et $k = q$ deviennent respectivement $j = q - p$ et $j = 0$ (Notons que la borne supérieure devient la borne inférieure et vice versa).

On peut donc écrire : $S = \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{j=0}^{q-p} a_{q-j}$.

2.4 Une application, les sommes télescopiques

Lemme 8. Soit a une suite de complexes et p et q deux entiers naturels vérifiant $p < q$; alors :

$$\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$

Application 9 (Une nouvelle identité remarquable). Soit a et b deux réels et n un entier naturel. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \right).$$

Si, de plus n est un entier pair (et donc $n + 1$ est impair), alors :

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a + b) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k a^{n-k} b^k \right).$$

3 Extension aux produits

3.1 Règles de calcul

Proposition 10 (Règles de calcul pour les produits). Soit (a_k) et (b_k) deux suites de réels et m et n des entiers naturels vérifiant $m \leq n$. Alors :

$$i) \prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \left(\prod_{k=m}^n b_k \right).$$

ii) Soient λ un nombre réel, alors,

$$\prod_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1} \left(\prod_{k=m}^n a_k \right).$$

$$\prod_{k=m}^n (a_k^\lambda) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right)^\lambda.$$

Exercice 11. Écrire la règle de Chasles pour les produits

Proposition 12 (Changement d'indice). *Les règles de changement d'indices pour les produits sont exactement les mêmes que pour les sommes.*

Proposition 13 (Produits télescopique). *Soit a une suite de réels et p et q deux entiers naturels vérifiant $p < q$; alors :*

$$\prod_{k=p}^q \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}.$$

3.2 Sommes à double indices

Définition 14. Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels à double indices et n et m deux entiers naturels. On appelle somme double, toute expression de type :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j}.$$

Cette expression désigne la valeur de la somme des éléments de l'ensemble $\{a_{i,j} \mid (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket\}$.

3.2.1 Ce qu'on peut faire

Proposition 15 (Un cas favorable). *Soit b et c deux suites de réels et n et m deux entiers naturels; alors :*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \left(\sum_{j=1}^m c_j \right).$$

Proposition 16 (sommation en lignes ou en colonnes). *Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels à double indices et n et m deux entiers naturels; alors :*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

Ces formules correspondent à regrouper les éléments à sommer en un tableau puis à sommer lignes par lignes ou bien colonnes par colonnes.

3.2.2 Cas des sommes triangulaires

Proposition 17 (sommes triangulaires). *Ce sont des sommes du type : $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$.*

Les formules de sommations en lignes et en colonnes s'écrivent respectivement :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{i,j}$$

et

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j}$$

4 Coefficients binomiaux

4.1 Définitions

Définition 18. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $n! := \prod_{k=1}^n k$. Le nombre $n!$ est appelé factorielle de n

Définition 19. Soient n et p deux entiers naturels, on appelle **coefficient binomial** « p parmi n », et l'on note $\binom{n}{p}$, le nombre suivant :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.2 Propriétés élémentaires

Proposition 20 (Relation de récurrence sur les factorielles). *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $(n+1)! = (n+1)n!$ et $\frac{(n+1)!}{n+1} = n!$.*

Proposition 21 (Premières propriétés). *Les coefficients binomiaux satisfont les propriétés suivantes*

$$i) \text{ Si } p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{(n-p+1) \times (n-p+2) \times \dots \times n}{p!} = \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (n-k).$$

$$ii) \forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 22 (Symétries des coefficients binomiaux). *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leq n$, alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Proposition 23 (Formule de Pascal). *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leq n$. On suppose de plus que $n \geq 1$ et $p \geq 1$,*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Proposition 24 (Formule du capitaine). *Soit p et n deux entiers naturels vérifiant $p \leq n$. On suppose de plus que $n \geq 1$ et $p \geq 1$,*

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

4.3 Formule du binôme

Proposition 25 (Formule du binôme de Newton).

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 26. En appliquant cette formule avec $b = 1$, il vient :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (1 + a)^n.$$