Colles semaine 9

En bref

— Exemples pratiques de résolution de systèmes linéaires. Algorithme du pivot de Gauss.
— Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.
— Écriture matricielle des systèmes linéaires.
— Produit de matrices, lien avec les transposition.
— Cas des matrices carrées. Lien entre l'inversibilité des matrices carrées et le nombre de solutions des systèmes associés. Notion de système de Cramer.
— Calculs dans $\mathbb{C}$. Partie réelle et imaginaire. Conjugaison
— Module et arguments. Inégalité triangulaire. Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$.
— Nouvelles preuves des formules trigonométriques à l'aide des calculs complexes, factorisation en angle moitié.

Exemples de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

— Citer la formule de produit matriciel, l'appliquer pour montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
— Citer la formule de produit matriciel. L'appliquer pour montrer que $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ lorsque A et B sont deux matrices de formats compatibles.
— Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène associé ; montrer que $\mathcal{S} = \{X + Z \mid Z \in \mathcal{S}_0\}$ pour toute solution particulière $X \in \mathcal{S}$. En déduire les nombres possibles de solutions pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$.
— Démontrer la première de l'inégalité triangulaire. Citer sans preuve la deuxième inégalité [1] triangulaire et les cas d'égalités.
— Pour un réel $t \in [0\,;\,2\pi[$, déterminer le module et un argument de $z_t := 1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
— Retrouver l'identité de factorisation $\cos p + \cos q = \cdots$ en calculant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}p}$.
variantes possibles avec le sinus ou en changeant les signes.

Notes aux colleurs et colleuses

— Nous n'avons pas encore traité la résolution d'équation polynomiale complexe.

1. voir proposition 13 de ce document pour ce que j'appelle première et deuxième inégalité.

En détail

1 Matrices et résolution de systèmes linéaires

Reprise du programme précédent

2 Nombres complexes

2.1 Construction du corps des complexes

On définit une addition et une multiplication sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

Définition 1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ les lois $\oplus$ et $\otimes$ suivantes :
— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$.
— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a,b) \otimes (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

Notation 2. Nous réalisons les identifications suivantes :

1. On identifie tout réel a avec le couple $(a,0)$.
2. $(0,1) \otimes (0,1) = (-1,0)$. On identifie donc i avec le couple $(0,1)$.
3. Tout couple (a,b) de réels sera noté $a+ib$.

2.2 Propriétés algébriques

Définition 3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a+ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre complexe z. On les note alors :

$$a = \mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

Tout nombre complexe z s'écrit donc de manière unique sous la forme $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ qui s'appelle la **forme algébrique** de z.

Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$ car c'est l'ensemble $\{ib\ ;\ b \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 4. Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Attention ! Écrire $z = a+ib$ ne suffit pas pour conclure que $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Il faut également que a et b soit réels.

Proposition 5 (linéarité des parties réelles et imaginaires)**.**

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \ \mathrm{Re}(\lambda z+\mu z') = \lambda \mathrm{Re}(z)+\mu \mathrm{Re}(z')\ \ ;\ \ \mathrm{Im}(\lambda z+\mu z') = \lambda \mathrm{Im}(z)+\mu \mathrm{Im}(z')$$

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \ \mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')\ \ ;\ \ \mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z')$$

Proposition 6 (inversibilité)**.** *Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}. C'est-à-dire un nombre tel que $zz^{-1} = 1$. Par ailleurs, cet inverse est unique.*

2.2.1 Conjugaison

Définition 7. Soit z un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre défini par :

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z).$$

Proposition 8 (Propriétés de base)**.** *Pour tous nombres complexes z et z',*

1. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\overline{\lambda z+\mu z'} = \lambda\bar{z}+\mu\bar{z'}$ *(on dit que la conjugaison est $\mathbb{R}$-linéaire) ;*
2. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$ *;*
3. *si de plus,* $z\neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ *;*
4. *si* $z'\neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ *;*
5. $\bar{\bar{z}} = z$ *(on dit que la conjugaison est une involution).*
6. $$\forall z\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad ; \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Proposition 9 (Caractérisation des réelles et imaginaires purs)**.** *On peut caractériser les réels et les imaginaires purs.*

— *Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z=\bar{z}$.*
— *Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z=-\bar{z}$.*

2.2.2 Module

Définition 10. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on appelle **module** de z le réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2}.$$

Remarque 11. Si $z\in\mathbb{R}$, alors le module de z n'est autre que la valeur absolue de z.

Proposition 12 (Propriétés de base)**.** *Pour tout nombre complexe z, on a :*

1. $|\bar{z}| = |z|$ *;*
2. $z=0 \iff |z|=0$ *;*
3. $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$ et $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$ *;*
4. *si de plus* $z\neq 0$,
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
5. *Pour tous complexes z_1 et z_2,*
$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \text{ et si } z_2\neq 0,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Proposition 13 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous complexes z_1 et z_2, on a :*

1. $$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$
avec égalité si et seulement si $\exists k\in\mathbb{R}^+,\ z_1=kz_2$ ou $z_2=kz_1$
2. $$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$$
avec égalité si et seulement si $\exists k\in\mathbb{R}^+,\ z_1=kz_2$ ou $z_2=kz_1$

3 Notation trigonométrique et exponentielle complexe

On se fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan et on considère les points I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$. On notera $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

3.1 Notation exponentielle

Notation 14 (Notation d'Euler)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Proposition 15 (Caractérisation du cercle unité)**.** *On a, avec cette notation,* $\mathbb{U} = \{e^{i\theta};\ \theta \in \mathbb{R}\}$, *c'est-à-dire :*

i) $|e^{i\theta}| = 1$ *et donc* $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ *;*

ii) réciproquement, pour tout $z \in \mathbb{U}$, *il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = e^{i\theta}$.

Proposition 16 (Règles de calculs pour l'exponentielle)**.** *Cette notation est cohérente avec les règles de calculs classiques de l'exponentielle, à savoir :*

i) $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ *si et seulement si* $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

ii) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

iii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

iv) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Proposition 17 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{i\theta}).$$

Méthode 18. En écrivant pour un réel θ et un entier n , $\cos^n(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$ et en développant avec la formule du binôme, on retrouve la linéarisation de $\cos^n(\theta)$.

Application 19 (Factorisation par angle moitié)**.** Pour tout réel θ, $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Proposition 20 (Formule de De Moivre)**.** *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méthode 21. Cette formule permet de retrouver (après extraction des parties réelle et imaginaire) les délinéarisation de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

3.2 Modules et argument

Proposition-Définition 22. *Pour tout complexe* ***non nul*** $z \in \mathbb{C}^*$, *il existe* $r \in \mathbb{R}_+$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *tels que* $z = re^{i\theta}$. *Le réel positif* r *de l'égalité est unique et vaut le module de* z, $r = |z|$. *Par ailleurs, il existe une infinité de valeur de* θ *correspondante, toutes congrues modulo* 2π. *Une telle valeur de* θ *est appelé un argument de* z. *L'unique telle valeur de* θ *de l'intervalle* $]-\pi\,;\,\pi]$ *est parfois appelée argument principal de* z *et se note* $\mathrm{Arg}(z)$. *Par ailleurs l'écriture* $z = \mathrm{re}^{i\theta}$ *s'appelle forme trigonométrique de* z.

Corollaire 23. *Soient* z_1 *et* z_2 *deux nombres complexes non nuls. Alors,*

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$$

Méthode 24. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ?
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $z = a + ib$. On calcule $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, puis on cherche un argument θ de z tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

On ne connaît pas toujours une solution simple de ce système !