Colles semaine 10

En bref

- Calculs dans $\mathbb{C}$. Partie réelle et imaginaire. Conjugaison
- Module et arguments. Inégalité triangulaire. Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$.
- Nouvelles preuves des formules trigonométriques à l'aide des calculs complexes, factorisation en angle moitié.
- Résolution des équations polynomiales à coefficients complexes de degré n.
- Racines n-ièmes de l'unité, notation $\mathbb{U}_n$. Résolution de $z^n = w$ d'inconnue z pour un complexe w fixé.
- Deux résultats admis sur les polynômes généraux :
  - Si $P(\alpha) = 0$, alors on peut trouver une factorisation de type $P = (X - \alpha)Q$ pour un certain polynôme Q.
  - Un polynôme complexe non constant admet entre 1 et $\deg(P)$ racines dans $\mathbb{C}$.

Exemples de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Démontrer la première de l'inégalité triangulaire. Citer sans preuve la deuxième inégalité [1] triangulaire et les cas d'égalités.
- Pour un réel $t \in [0\,;\,2\pi[$, déterminer le module et un argument de $z_t := 1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
- Retrouver l'identité de factorisation $\cos p + \cos q = \cdots$ en calculant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}p}$.
  variantes possibles avec le sinus ou en changeant les signes.
- Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour un réel x fixé en l'exprimant comme une partie réelle de somme géométrique.
- Citer sans preuve la résolution de $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire la résolution de $z^5 = 32\mathrm{i}$ (ou une variante du même acabit). Représenter géométriquement l'ensemble des solutions.
- Citer sans preuve la résolution de $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire la résolution $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Représenter géométriquement l'ensemble des solutions.

Notes aux colleurs et colleuses

- Il me semble de bon ton de faire une colle en trois temps. D'abord la question de cours, puis une résolution d'équation complexe du second degré (on s'arrangera pour que le discriminant ne soit pas réel). Puis un exercice libre sur les complexes.
- Exceptionnellement, les étudiants sont autorisés à apporter en colle une liste de tous les carrées d'entiers entre 10 et 30 afin de fluidifier certains calculs.
- L'étude des polynômes comme objet formel n'est pas encore un enjeu du cours. J'ai introduit la notation avec X et vous êtes libre de l'utiliser mais si cela pose des soucis aux étudiants, on reviendra à une notation fonctionnelle des polynômes.
- Notamment, la notion de multiplicité d'une racine n'a pas du tout été évoquée.
- L'utilisation de la notation $\sqrt{a}$ si a est autre chose qu'un réel positif est une faute lourde qui doit être fortement sanctionnée.

1. voir proposition 13 de ce document pour ce que j'appelle première et deuxième inégalité.

En détail

1 Matrices et résolution de systèmes linéaires

Reprise du programme précédent

2 Nombres complexes

2.1 Construction du corps des complexes

On définit une addition et une multiplication sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

Définition 1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ les lois $\oplus$ et $\otimes$ suivantes :
— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$.
— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a,b) \otimes (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

Notation 2. Nous réalisons les identifications suivantes :

1. On identifie tout réel a avec le couple $(a,0)$.
2. $(0,1) \otimes (0,1) = (-1,0)$. On identifie donc i avec le couple $(0,1)$.
3. Tout couple (a,b) de réels sera noté $a+ib$.

2.2 Propriétés algébriques

Définition 3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a+ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre complexe z. On les note alors :

$$a = \mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

Tout nombre complexe z s'écrit donc de manière unique sous la forme $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ qui s'appelle la **forme algébrique** de z.

Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$ car c'est l'ensemble $\{ib\ ;\ b \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 4. Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Attention ! Écrire $z = a+ib$ ne suffit pas pour conclure que $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Il faut également que a et b soit réels.

Proposition 5 (linéarité des parties réelles et imaginaires)**.**

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \ \mathrm{Re}(\lambda z+\mu z') = \lambda \mathrm{Re}(z)+\mu \mathrm{Re}(z')\ \ ;\ \ \mathrm{Im}(\lambda z+\mu z') = \lambda \mathrm{Im}(z)+\mu \mathrm{Im}(z')$$

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \ \mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')\ \ ;\ \ \mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z')$$

Proposition 6 (inversibilité)**.** *Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}. C'est-à-dire un nombre tel que $zz^{-1} = 1$. Par ailleurs, cet inverse est unique.*

2.2.1 Conjugaison

Définition 7. Soit z un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre défini par :

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z).$$

Proposition 8 (Propriétés de base)**.** *Pour tous nombres complexes z et z',*

1. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \overline{\lambda z+\mu z'} = \lambda\bar{z}+\mu\bar{z'}$ *(on dit que la conjugaison est $\mathbb{R}$-linéaire) ;*
2. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$ *;*
3. *si de plus,* $z\neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ *;*
4. *si* $z'\neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ *;*
5. $\bar{\bar{z}} = z$ *(on dit que la conjugaison est une involution).*
6. $$\forall z\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}\quad ;\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Proposition 9 (Caractérisation des réelles et imaginaires purs)**.** *On peut caractériser les réels et les imaginaires purs.*

— *Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z=\bar{z}$.*
— *Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z=-\bar{z}$.*

2.2.2 Module

Définition 10. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on appelle **module** de z le réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2}.$$

Remarque 11. Si $z\in\mathbb{R}$, alors le module de z n'est autre que la valeur absolue de z.

Proposition 12 (Propriétés de base)**.** *Pour tout nombre complexe z, on a :*

1. $|\bar{z}| = |z|$ *;*
2. $z=0 \iff |z|=0$ *;*
3. $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$ et $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$ *;*
4. *si de plus* $z\neq 0$,
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
5. *Pour tous complexes z_1 et z_2,*
$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \text{ et si } z_2\neq 0,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Proposition 13 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous complexes z_1 et z_2, on a :*

1. $$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$
avec égalité si et seulement si $\exists k\in\mathbb{R}^+,\ z_1=kz_2$ ou $z_2=kz_1$
2. $$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$$
avec égalité si et seulement si $\exists k\in\mathbb{R}^+,\ z_1=kz_2$ ou $z_2=kz_1$

3 Notation trigonométrique et exponentielle complexe

On se fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan et on considère les points I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$. On notera $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

3.1 Notation exponentielle

Notation 14 (Notation d'Euler)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Proposition 15 (Caractérisation du cercle unité)**.** *On a, avec cette notation,* $\mathbb{U} = \{e^{i\theta};\ \theta \in \mathbb{R}\}$, *c'est-à-dire :*

i) $|e^{i\theta}| = 1$ *et donc* $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ *;*

ii) réciproquement, pour tout $z \in \mathbb{U}$, *il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = e^{i\theta}$.

Proposition 16 (Règles de calculs pour l'exponentielle)**.** *Cette notation est cohérente avec les règles de calculs classiques de l'exponentielle, à savoir :*

i) $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ *si et seulement si* $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

ii) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

iii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

iv) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Proposition 17 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{i\theta}).$$

Méthode 18. En écrivant pour un réel θ et un entier n , $\cos^n(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$ et en développant avec la formule du binôme, on retrouve la linéarisation de $\cos^n(\theta)$.

Application 19 (Factorisation par angle moitié)**.** Pour tout réel θ, $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Proposition 20 (Formule de De Moivre)**.** *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méthode 21. Cette formule permet de retrouver (après extraction des parties réelle et imaginaire) les délinéarisation de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

3.2 Modules et argument

Proposition-Définition 22. *Pour tout complexe* ***non nul*** $z \in \mathbb{C}^*$, *il existe* $r \in \mathbb{R}_+$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *tels que* $z = re^{i\theta}$. *Le réel positif* r *de l'égalité est unique et vaut le module de* z, $r = |z|$. *Par ailleurs, il existe une infinité de valeur de* θ *correspondante, toutes congrues modulo* 2π. *Une telle valeur de* θ *est appelé un argument de* z. *L'unique telle valeur de* θ *de l'intervalle* $]-\pi\,;\,\pi]$ *est parfois appelée argument principal de* z *et se note* $\mathrm{Arg}(z)$. *Par ailleurs l'écriture* $z = \mathrm{re}^{i\theta}$ *s'appelle forme trigonométrique de* z.

Corollaire 23. *Soient* z_1 *et* z_2 *deux nombres complexes non nuls. Alors,*

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$$

Méthode 24. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ?
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $z = a + ib$. On calcule $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, puis on cherche un argument θ de z tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

On ne connaît pas toujours une solution simple de ce système !

4 À propos des équations polynomiales complexes

Notation 25. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X^n la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $X^n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$.

Nous commençons par rappeler ce qu'est un polynôme.

Définition 26. Soit P une application définie sur $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$. On dit que P est *une application polynomiale* ou un *polynôme* s'il existe un entier naturel n et un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k. \tag{1}$$

Dans ce cas, on note plus simplement $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Lemme 27 (degré)**.** *Soit P une application polynomiale, non constante nulle, alors il existe un et un unique entier naturel n et unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant*

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \\ \text{et } a_n \neq 0. \end{cases}. \tag{2}$$

Cet entier n s'appelle le degré *de P et le complexe a_n s'appelle le* coefficient dominant *de P.*

Par convention, le degré du polynôme constant nul vaut $-\infty$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n (incluant le polynôme nul).

Corollaire 28 (principe d'identification des coefficients d'un polynôme)**.** *La suite des coefficients d'un polynôme est unique. Notamment, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \forall (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1},$$
$$\left(\forall z \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k \right) \implies (\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], a_k = b_k).$$

4.1 Le second degré

4.1.1 Calcul de racines carrées

Définition 29. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **racine carrée** de z tout nombre complexe Z tel que $Z^2 = z$.

Proposition 30. *Le complexe* 0 *admet une unique racine carrée qui est* 0*. Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées qui sont opposées l'une de l'autre.*

Remarque 31. Si a est un réel positif, on parle de **la** racine carrée de a pour désigner celle des deux racines qui est positive. Dans le cas où z est un nombre complexe, on ne dispose pas d'un tel moyen pour particulariser l'une des deux racines. Pour cette raison on dit **une** racine carrée de z et on s'interdit d'utiliser le symbole déterministe $\sqrt{\cdot}$ qui reste réservé aux réels positifs.

Méthode 32 (Détermination de racine carré)**.** On a deux méthodes principales pour déterminer une racine carré :

1. **Via la forme trigonométrique** : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ qui admet pour forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$. Alors les racines carrées de z sont : $\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$.
2. **Via la forme algébrique** : Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On cherche $Z = X + iY$ avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Z^2 = z$. Alors, on en déduit :
   — par égalité des parties réelles : $X^2 - Y^2 = \mathrm{Re}(z) = x$
   — par égalité des modules : $X^2 + Y^2 = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
   — par égalité des parties imaginaires : $2XY = \mathrm{Im}(z)$, en particulier XY est du même signe que y.

4.1.2 Second degré général

Proposition 33 (Equation du second degré à coefficients complexes)**.** *Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On considère l'équation :*

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors,

— *Si $\Delta \neq 0$, en notant δ une racine carrée de Δ, l'équation (E) admet les deux racines distinctes suivantes :*

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

— *Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet pour unique racine*

$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Proposition 34. *Si a, b et c sont réels et si z_1 est une racine de $az^2+bz+c = 0$; alors $z_2 = \bar{z_1}$ est aussi une racine (pas nécessairement distincte) de l'équation.*

4.1.3 Relation coefficients-racines

Proposition 35. *Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors,*

z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

4.2 Degré quelconque et racines n-ièmes

Comme pour le degré 2, avant de résoudre une équation générale de degré n, il est bon de commencer par résoudre l'équation $z^n = a$ pour un complexe fixé a. La situation devenant d'ailleurs légèrement plus délicate, on s'attardera en priorité sur le cas $a = 1$ avant d'étudier le cas général.

Définition 36. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un complexe fixé. On appelle *racine n-ème de a* tout complexe z vérifiant $z^n = a$.

On appelle également *racine n-ème de l'unité* tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.

4.2.1 Racines de l'unité

Notation 37. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Thèmes de réflexions 38. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est-il non vide ? Que dire du produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$? de l'inverse d'un élément de $\mathbb{U}_n$?

Proposition 39. *Il existe exactement n racines de l'unité, ce sont les complexes*

$$w_k = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right) \quad \text{où} \quad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{U}_n = \left\{\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right);\ \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right);\ \ k \in [\![0\,;\, n-1]\!]\right\}.$$

Thèmes de réflexions 40. Soit z un nombre complexe de module 1. Existe-t-il $n \in \mathbb{N}^*$ tel que z soit une racine n-ième de l'unité ?

L'ensemble des racines de l'unité représente géométriquement les affixes d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique. En particulier, l'isobarycentre de ce polygone est l'origine du repère ; ce qui se traduit par la proposition suivante.

Proposition 41. *Soit n un entier au moins égal à 2. On a $\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = 0$. Plus explicitement, cela signifie que si l'on pose $\omega = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$, alors on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

4.2.2 Racine n-ème d'un complexe quelconque

Proposition 42. *Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Posons $a = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*

i) Le nombre complexe a admet exactement n racines n-ièmes, ce sont les

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

ii) Si z_0 est une racine n-ième particulière de a alors les racines n-ièmes de a sont les $z_0 w_k$ avec $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ et où les w_k sont les racines n-ièmes de l'unité. L'ensemble des racines n-ièmes de a est donc $z_0\mathbb{U}_n = \{z_0 w\ ;\ w \in \mathbb{U}_n\}$.

iii) Les images dans le plan des racines n-ièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés d'isobarycentre O.

4.2.3 Équations polynomiales générales

On se contente de trois résultats admis

Théorème 43 (Principe de factorisation par racines)**.** *Soit P un polynôme et a un complexe. Si $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-a)Q(z)$.*

Théorème 44. *Soit P un polynôme non constante nul. Alors P le nombre de racines de P est inférieur ou égal à $\deg(P)$.*

Théorème 45 (Théorème de D'Alembert-Gauss ou théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Soit P un polynôme non constant (c'est-à-dire de degré au moins 1). Le polynôme P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 46. Comme on le sait depuis longtemps, le théorème précédent est faux dans $\mathbb{R}$. En effet, le polynôme X^2+1 n'admet aucune racine réelle. Mais il admet bien des racines complexes (lesquelles ?)

Un dernier résultats à prouver et parfois utile :

Lemme 47. *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $a \neq 0$, on pose alors $P : z \mapsto az^2+bz+c$. Soit également z_0 un autre complexe. Si z_0 est une racine du polynôme* ***à coefficient réel*** *P, alors $\bar{z_0}$ est également une racine de P. C'est-à-dire que $P(z_0) = 0 \implies P(\bar{z_0}) = 0$.*