# Colles semaine 11

## En bref

- Résolution des équations polynomiales à coefficients complexes de degré $n$.
- Racines $n$-ièmes de l'unité, notation $\mathbb{U}_n$. Résolution de $z^n = w$ d'inconnue $z$ pour un complexe $w$ fixé.
- Deux résultats admis sur les polynômes généraux :
  - Si $P(\alpha) = 0$, alors on peut trouver une factorisation de type $P = (X - \alpha)Q$ pour un certain polynôme $Q$.
  - Un polynôme complexe non constant admet entre 1 et $\deg(P)$ racines dans $\mathbb{C}$.
- Théorie des applications entre ensembles :
  - Injections, surjections, bijection
  - Bijection réciproque d'une application bijective.
  - Images réciproques et images directes d'un sous-ensemble par une application.
  - Cas important des bijections réelles, Théorème de la bijection.

## Exemples de questions de cours

*Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.*

- Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour un réel $x$ fixé en l'exprimant comme une partie réelle de somme géométrique.
- Citer sans preuve la résolution de $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire la résolution de $z^5 = 32\mathrm{i}$ (ou une variante du même acabit). Représenter géométriquement l'ensemble des solutions.
- Citer sans preuve la résolution de $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire la résolution $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Représenter géométriquement l'ensemble des solutions.
- Montrer que la composée de deux injections est injective. (Ou la variante avec les surjections).
- Montrer que l'application ch induit une bijection entre deux ensembles bien choisis en exploitant le théorème de la bijection. *On pourra demander une expression de la bijection réciproque mais cela dépasse le cadre de la question de cours (fait en TD septembre).*

## Notes aux colleurs et colleuses

- L'étude des polynômes comme objet formel n'est pas encore un enjeu du cours. J'ai introduit la notation avec $X$ et vous êtes libre de l'utiliser mais si cela pose des soucis aux étudiants, on reviendra à une notation fonctionnelle des polynômes.
- Notamment, la notion de multiplicité d'une racine n'a pas du tout été évoquée.
- L'utilisation de la notation $\sqrt{a}$ si $a$ est autre chose qu'un réel positif est une faute lourde qui doit être fortement sanctionnée.
- On ne passera pas plus de la moitié du temps de colle sur les notions d'injectivité/surjectivité/images directes...
- Je n'ai pas encore eu le temps de définir les application trigonométriques réciproques. On gardera ça pour la semaine prochaine. De même, la formule donnant la dérivée d'une bijection réciproque réelle n'est pas au programme.

# En détail

# 1 Nombres complexes

Reprise du programme précédent

# 2 Théorie des applications

## 2.1 Généralités

**Définition 1** (Composition de fonction)**.** Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles et $f : E \to F$ une fonction et $g : F \to G$ une autre fonction. On appelle composée de $f$ par $g$ et on note $g \circ f$, la fonction définie ainsi :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

*Remarque* 2. En général $f \circ g \neq g \circ f$. On remarquera d'ailleurs, selon les domaines de définition, que l'une de ces deux fonctions peut être bien définie sans que la deuxième ne le soit.

Terminons cette introduction par deux notions générales mais que l'on étudiera surtout dans le cadre des applications linéaires.

**Définition 3** (Restriction)**.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Pour toute partie $A \subset E$, on définit une fonction de $A$ dans $F$ que l'on appelle la restriction de $f$ à $A$ et que l'on note $f_{|A}$. Cette fonction est définie de la manière suivante : $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

**Définition 4** (Prolongement)**.** Soit $A$ et $F$ deux ensembles et $f : A \to F$ une fonction. Si $E$ est un ensemble qui contient $A$ et $g$ est une fonction de $E$ dans $F$, on dit que $g$ est un prolongement de $f$ si la restriction de $g$ à $A$ est la fonction $f$.

**Exemple 5.**
- La restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction *partie entière* : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ est la fonction *identité* : $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n \end{array}$.
- La fonction exponentielle de base deux : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x \ln 2) \end{array}$ définie au lycée est un prolongement de la fonction puissance de deux : $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 2^n \end{array}$, définie sur les entiers au collège.
- La fonction module $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_+ \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$ est un prolongement de la fonction valeur absolue $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$. C'est d'ailleurs pour cela qu'on s'autorise à utiliser la même notation pour ces deux fonctions.

## 2.2 La question de l'existence et unicité des antécédents

### 2.2.1 Injections

**Définition 6** (Injection)**.** Soit $f$ une fonction entre deux ensembles $E$ et $F$. On dit que $f$ est *injective* si

$$\forall (x, x') \in E^2,\ \Big(f(x) = f(x')\Big) \implies (x = x')$$

**Proposition 7** (Unicité des antécédents pour les fonctions injectives)**.** *Une fonction $f$ de $E$ dans $F$ est injective si et seulement si tout élément de $F$ admet au plus un antécédent.*

**Exemple 8.** i) La fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective.

ii) La fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas injective.

*Remarque* 9. On notera que la notion d'injectivité dépend de manière cruciale de l'ensemble de définition de la fonction. Ainsi la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective alors que la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ ne l'est pas !

### 2.2.2 Surjections

**Définition 10** (Surjection)**.** Soit $f$ une fonction entre deux ensembles $E$ et $F$. On dit que $f$ est *surjective* si

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$$

**Proposition 11** (Existence des antécédents pour les fonctions surjectives)**.** *Une fonction $f$ de $E$ dans $F$ est surjective si et seulement si tout élément de $F$ admet au moins un antécédent.*

**Exemple 12.** i) La fonction logarithme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est surjective.

ii) La fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas surjective.

*Remarque* 13. Attention, cette définition dépend de l'ensemble d'arrivée $F$. Ainsi la fonction exponentielle n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais elle est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

### 2.2.3 Bijections

**Définition 14.** Une fonction de $E$ dans $F$ est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

**Définition 15** (Application réciproque d'une bijection)**.** Soit $f$ une fonction bijective de $E$ dans $F$. Alors on peut définir une fonction qui à tout élément de $F$ associe son unique antécédent par $f$. Cette fonction ainsi définie de $F$ dans $E$ est appelée réciproque de $f$ et se note $f^{-1}$.

**Attention !** Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, on ne confondra pas $f^{-1}$ avec la fonction $\frac{1}{f}$ qui serait la fonction définie ainsi : $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array}$.

*Remarque* 16. La définition d'une réciproque suppose que $f$ est bijective. Aussi on n'écrira jamais $f^{-1}$ avant d'avoir prouvé ou supposé que $f$ était bien bijective.

**Exemple 17.** Citons deux exemples bien connus.

i) La fonction carré réalise une bijection de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Sa réciproque est définie de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et n'est autre que la racine carré.

ii) La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Sa réciproque est définie de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Il s'agit bien sûr du logarithme.

**Proposition 18.** *Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.*

**Corollaire 19.** *Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors sa réciproque $f^{-1}$ est encore une bijection de $F$ sur $E$. De plus, la réciproque de $f^{-1}$ est la fonction $f$ elle-même.*

**Proposition 20.** *Soit Soit $f : E \to F$ une fonction. S'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ; alors $f$ est bijective et la fonction $g$ est la réciproque de $f$.*

**Attention !** Le résultat précédent est en général faux si seulement l'une des deux égalités est vraie. On s'en convaincra à l'aide de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$.

## 2.3 Images directes et images réciproques

Nous introduisons ici les notions d'images directes et d'images réciproques d'ensemble par une fonctions. Ces deux notions se révèleront particulièrement importante en probabilité ainsi qu'en algèbre linéaire.

**Définition 21** (Images directes)**.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces deux ensembles. Soit également $A$ un sous-ensemble de $E$. On appelle image directe de $A$ (par $f$) et on note $f(A)$ le sous-ensemble de $F$ suivant :

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

**Proposition 22** (Images directes et unions/intersection. À remontrer si nécessaire)**.** *Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces ensembles. Alors :*

*i) Pour tout $A_1 \subset E$ et $A_2 \subset E$, on a $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.*

*ii) Pour tout $A_1 \subset E$ et $A_2 \subset E$, on a $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.*

*Pour le dernier cas, le lecteur est invité à chercher des exemples montrant que l'inclusion peut être stricte.*

**Définition 23** (Images réciproques)**.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces deux ensembles. Soit également $B$ un sous-ensemble de $F$. On appelle image réciproque de $B$ (par $f$) et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de $E$ suivant :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

*Remarque* 24 (Images réciproques et bijection). Si l'on se donne $f : E \to F$ une fonction *bijective* et $B$ un sous-ensemble de $F$, la notation $f^{-1}(B)$ est à priori ambiguë. Elle peut désigner soit l'image réciproque de $B$ par $f$, soit l'image directe de $B$ par $f^{-1}$. Heureusement, ces deux notions correspondent exactement au même ensemble comme le montrera le lecteur studieux.

**Proposition 25** (Images réciproques et unions/intersection. À remontrer si nécessaire)**.** *Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces ensembles. Alors :*

*i) Pour tout $B_1 \subset F$ et $B_2 \subset F$, on a $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.*

*ii) Pour tout $B_1 \subset F$ et $B_2 \subset F$, on a $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.*

**Proposition 26** (Composition d'image directe et réciproque. À remontrer si nécessaire)**.** *Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces ensembles. Soit également $A$ une partie de $E$ et $B$ une partie de $F$. Alors :*

*i) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.*

*ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.*

*Là encore, le lecteur est invité à chercher des exemples prouvant que ces inclusions peuvent être strictes.*

# 3 Le cas des fonctions réelles

## 3.1 Deux résultats cruciaux

**Théorème 27** (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.. Soit également $f : I \to [c\,;\,d]$ une fonction continue sur $f$ à valeurs réelles. Si $c$ et $d$ admettent chacun un antécédent et si $c \leqslant d$, alors l'intervalle $[c\,;\,d]$ est inclus dans l'image directe $f(I)$. Autrement dit $[c\,;\,d] \subset f(I)$.*

**Théorème 28.** *Soit fonction $f$ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est strictement monotone, alors elle est injective.*

## 3.2 Variations autour de ces résultats

**Théorème 29** (Image des intervalles par les fonctions continues)**.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $I$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et continue. Alors, l'image directe $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

**Théorème 30** (Image des segments par les fonctions continues)**.** *Soit $I$ un intervalle* ***fermé et borné*** *(on dit aussi un segment) de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $I$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et continue. Alors, l'image directe $f(I)$ est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.*

**Théorème 31.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est continue et injective, alors elle est strictement monotone sur $I$.*

## 3.3 Le théorème-bilan, importantissime

**Théorème 32** (Théorème de la bijection)**.** *Soit $[a\,;\,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $[a\,;\,b]$ et $J$ où $J$ est l'intervalle définie par :*

- *$J = [f(a)\,;\,f(b)]$ si $f$ est strictement croissante.*
- *$J = [f(b)\,;\,f(a)]$ si $f$ est strictement décroissante.*

*De plus, la réciproque de $f$ est encore une bijection entre $J$ et $[a\,;\,b]$ qui a même sens de variation que $f$ et qui est également continue.*

**Théorème 33** (Théorème de la bijection, version aux limites)**.** *Soit $]a\,;\,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $]a\,;\,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f$ admet des limites en $a$ et $b$ que l'on note respectivement $\ell_a$ et $\ell_b$. Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $]a\,;\,b[$ et $J$ où $J$ est l'intervalle définie par :*

- *$J = ]\ell_a\,;\,\ell_b[$ si $f$ est strictement croissante.*
- *$J = ]\ell_b\,;\,\ell_a[$ si $f$ est strictement décroissante.*

*De plus, la réciproque de $f$ est encore une bijection entre $J$ et $]a\,;\,b[$ qui a même sens de variation que $f$ et qui est également continue.*
*Ce théorème reste valables si les bornes $a$ et $b$ ou les limites $\ell_a$ et $\ell_b$ sont infinies.*