Colles semaine 11

En bref

- Théorie des applications entre ensembles :
  - Injections, surjections, bijection
  - Bijection réciproque d'une application bijective.
  - Images réciproques et images directes d'un sous-ensemble par une application.
  - Cas important des bijections réelles, Théorème de la bijection.
  - Dérivation des bijections réciproques réelles
- Application aux fonctions trigonométriques réciproques : arcsin ; arccos et arctan.
- Intégration des fractions rationnelles de type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P est un polynôme quelconque et Q un polynôme de degré 2.

Exemples de questions de cours

Les étudiantes et étudiants se présentent à la colle en sachant répondre rapidement et précisément à TOUTES les questions suivantes. Ils seront interrogés sur l'une d'entre elles.

- Montrer que la composée de deux injections est injective. (Ou la variante avec les surjections).
- Énoncer le théorème de dérivation des bijections réciproques. L'appliquer pour étudier la dérivabilité de arcsin (ou arccos au choix du colleur).
- Définir proprement arcsin et arccos, donner sans preuve leur dérivabilité et montrer que arcsin est impaire.
- Calculer $\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$ ou un exemple approchant.

En détail

1 Théorie des applications

Reprise du programme précédent avec en plus

1.1 Dérivabilité des bijections réciproques

Proposition 1 (Dérivée des réciproques)**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une bijection de I sur J. Soit également $x \in I$ et $y = f(x) \in J$. On suppose que f est dérivable en x. Alors f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'(x) \neq 0$, et dans ce cas :*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

2 Application aux fonctions trigonométriques réciproques

2.1 Arcsinus

Proposition-Définition 2 (fonction Arcsinus)**.** *La fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;\,1]$. Sa réciproque s'appelle la fonction arcsinus et se note* arcsin *. Pour tout $y \in [-1\,;\,1]$, $\arcsin(y)$ est donc défini comme l'unique réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\sin(\theta) = y$.*

Théorème 3. *La fonction Arcsinus : $[-1\,;\,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction bijective, impaire strictement croissante. Elle est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et*

$$\forall y \in]-1\,;\,1[\,,\ \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Lemme 4. *On a $\forall x \in [-1\,;\,1]\,,\ \sin(\arcsin(x)) = x$.*

Attention ! La formule précédente n'est pas valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, pour la bonne raison que $\arcsin(x)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

De même, bien qu'elle soit tentante, on prendra garde avec l'identité $x = \arcsin((\sin(x))$ qui n'est valable **que si** $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2.2 Arccosinus

Proposition-Définition 5 (fonction Arccosinus)**.** *La fonction cosinus réalise une bijection de $[0\,;\,\pi]$ sur $[-1\,;\,1]$. Sa réciproque s'appelle la fonction arccosinus et se note* arccos *. Pour tout $y \in [-1\,;\,1]$, $\arccos(y)$ est donc défini comme l'unique réel $\theta \in [0\,;\,\pi]$ vérifiant $\cos(\theta) = y$.*

Théorème 6. *La fonction Arccosinus : $[-1\,;\,1] \to [0\,;\,\pi]$ est une fonction bijective et strictement décroissante. Elle est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ et*

$$\forall y \in]-1\,;\,1[\,,\ \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Remarque 7. La fonction arccosinus n'est ni paire ni impaire.

Lemme 8. *On a $\forall x \in]-1\,;\,1[\,,\ \cos(\arccos(x)) = x$.*

Attention ! La formule précédente n'est pas valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, pour la bonne raison que $\arccos(x)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

De même, bien qu'elle soit tentante, on prendra garde avec l'identité $x = \arccos((\cos(x))$ qui n'est valable **que si** $x \in [0\,;\,\pi]$.

2.3 Arctangente

Proposition-Définition 9 (fonction Arctan)**.** *La fonction tangente réalise une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $]-\infty\,;\,+\infty[$*. Sa réciproque s'appelle la fonction arctangente et se note* arctan*. Pour tout* $y \in \mathbb{R}$*,* $\arctan(y)$ *est donc défini comme l'unique réel* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *vérifiant* $\tan(\theta) = y$*.*

Théorème 10. *La fonction Arctangente :* $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ *est une fonction bijective, impaire strictement croissante. Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Remarque 11. La fonction arctangente est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Méthode 12. Si P est un polynôme de degré 2 sans racines réelles, alors on peut primitiver la fonction $\frac{1}{P}$ à l'aide de la fonction arctangente. Pour ce faire, il convient de :

- Mettre P sous forme canonique.
- Multiplier par une constante bien choisie pour faire apparaître une forme de type $\frac{1}{P(t)} = \frac{\alpha}{(\beta t+\gamma)^2+1}$.
- Appliquer alors un changement de variable affine vérifiant la relation $y^2 = (\beta t + \gamma)^2$.
- Utiliser la dérivée de arctangente.

Illustrons ces quatre étapes sur le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t && && \text{(1a)}\\
&= \int_0^1 \frac{1}{(t+1/2)^2+3/4}\mathrm{d}t && \text{(mise sous forme canonique)} && \text{(1b)}\\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}(t+1/2)^2+1}\mathrm{d}t && \text{(multiplication par le bon facteur numérique)} && \text{(1c)}\\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y && \text{par le changement de variable } y = \underset{\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}y}{\frac{2}{\sqrt{3}}(t+1/2)} && \text{(1d)}\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(y)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} && \text{primitive à l'aide d'arctangente)} && \text{(1e)}\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. && && \text{(1f)}
\end{aligned}$$

Remarque 13. Combiné avec les méthodes des cours précédents, nous savons maintenant primitiver toutes les expressions de la forme $\frac{Q}{P}$ où P est un polynôme de degré 2 (avec ou sans racines réelles) et Q est un polynôme quelconque. Cela commence par effectuer la division euclidienne du polynôme Q par P.